【문항 1】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.

(나) 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면 $l=r\theta$, $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$이다.

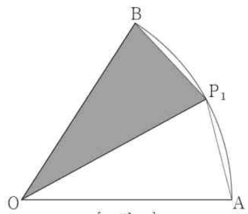
(다) 첫째항이 a이고 공비가 $r\ (r\neq 1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 이다.

[1-1] 열린구간 $(0,1)$에서 부등식 $0<x-\sin x<\frac{1}{6}x^3$이 성립함을 보이시오. (5점)

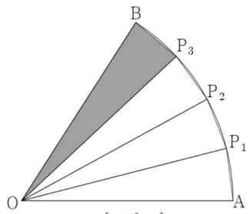
$f(x)=x-\sin x$, $g(x)=\frac{1}{6}x^3$, $h(x)=g(x)-f(x)=\frac{1}{6}x^3-x+\sin x$라고 하자. 구간 $(0,\ 1)$에서 $f'(x)=1-\cos x>0$이므로 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 증가한다. 이때 $f(0)=0$ 이므로 구간 $(0,\ 1)$에서 $f(x)>0$을 만족한다.

$h'(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x-1$이고 구간 $(0,\ 1)$에서 $h''(x)=x-\sin x>0$이므로 $h'(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 증가한다. 이때 $h'(0)=0$이므로 $h'(x)>0$이며 구간 $(0,\ 1)$에서 $h(x)$는 증가한다.
여기서 $h(0)=0$이므로 구간 $(0,\ 1)$에서 $h(x)=g(x)-f(x)>0$, $f(x)<g(x)$을 만족한다.
따라서 구간 $(0,\ 1)$에서 $0<f(x)<g(x)$이 성립한다.

[1-2] 반지름의 길이가 1이고 호의 길이가 1인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB를 2^n등분하여 점 A에 가까운 점부터 차례로 P_1, P_2, $\cdots$, P_k, $\cdots$, P_{2^n-1} $(1\le k\le 2^n-1)$이라 하고, 삼각형 OBP_{2^n-1}의 넓이를 T_n이라 하자. T_1과 T_2는 각각 [그림 1]과 [그림 2]에 색칠된 삼각형의 넓이이다.



[그림 1]



[그림 2]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $S_n=2^nT_n$이라 하자.

수열 $\{b_n\}$의 일반항이 $b_n=\sum_{k=1}^{n}2^k a_k$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $b_n<\frac{13}{12}$임을 보이시오. (25점)

반지름의 길이가 1, 호의 길이가 1이므로 부채꼴 OAB의 중심각의 크기는 1이다.

따라서 $\overline{OB}=\overline{OP_{2^n-1}}=1$, $\angle BOP_{2^n-1}=\frac{1}{2^n}$이므로

$$T_n=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OP_{2^n-1}}\times\sin\angle BOP_{2^n-1}=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2^n}$$ 이며

구간 $(0,\ 1)$에서 $x-\frac{1}{6}x^3<\sin x<x$ 이므로 $\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{12\times 2^{3n}}<T_n<\frac{1}{2^{n+1}}$이다.

또한 $a_1=S_1$, $n\ge 2$일 때 $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로 $b_1=4T_1<1<\frac{13}{12}$,

$n \geq 2$일 때 $b_n = 2S_1 + \sum_{k=2}^{n} 2^k (S_k - S_{k-1}) = 2^n S_n - \sum_{k=1}^{n-1} 2^k S_k = 2^{2n} T_n - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{2k} T_k$이다.

이때 $2^{2n} T_n < 2^{n-1}$, $\sum_{k=1}^{n-1} 2^{2k} T_k > \sum_{k=1}^{n-1} \left(2^{k-1} - \frac{1}{12 \times 2^k}\right) = 2^{n-1} + \frac{1}{12 \times 2^{n-1}} - \frac{13}{12}$ 이므로

$b_n = 2^{2n} T_n - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{2k} T_k < \frac{13}{12} - \frac{1}{12 \times 2^{n-1}} < \frac{13}{12}$를 만족한다. 따라서 모든 자연수 n에 대해

$b_n < \frac{13}{12}$가 성립한다.

【문항 2】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 두 변수 x, y 사이의 관계를 변수 t를 매개로 하여 $x = f(t)$, $y = g(t)$와 같이 나타낼 때, 변수 t를 x, y의 매개변수라 하며, 위 함수를 매개변수로 나타낸 함수라고 한다.

(나) 미분가능한 함수 $t = g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$에 대하여 함수 $f(t)$가 α와 β를 양 끝점으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때,

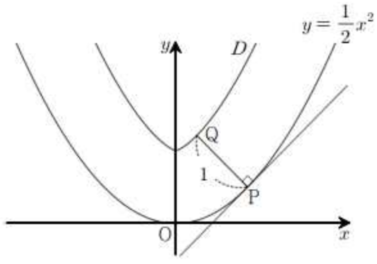
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

좌표평면 위를 움직이는 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(ⅰ) 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 Q는 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위의 점 P에서의 접선에 수직인 직선 위에 있으면서 점 P와 거리가 1인 점이다.

(ⅱ) 점 Q의 y좌표는 점 P의 y좌표보다 항상 크다.

매개변수 t에 대하여 점 P의 좌표를 $\left(t, \frac{t^2}{2}\right)$이라 할 때, 점 Q의 좌표 (x, y)는 $x = f(t)$, $y = g(t)$이다. 점 Q가 나타내는 곡선을 D라 할 때, 다음 물음에 답하시오.



[2-1] $f(t)$와 $g(t)$를 t에 관한 식으로 나타내시오. (10점)

점 P에서의 접선의 기울기가 t이므로 $\overline{PQ}$의 기울기가 $\frac{\frac{t^2}{2} - g(t)}{t - f(t)} = -\frac{1}{t}$, $\overline{PQ} = 1$이므로

$\{t - f(t)\}^2 + \left\{\frac{t^2}{2} - g(t)\right\}^2 = 1$이다. 또한 $g(t) > \frac{t^2}{2}$이므로 위 두 식을 정리하면

$f(t) = t - \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, $g(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ 이다.

[2-2] $x = f(t)$**,** $y = g(t)$ **인 점** $\mathrm{Q}(x, y)$ **에서의 곡선** D **의 접선과 곡선** $y = \frac{1}{2}x^2$ **이 만나는 두 점을** A**,** B**라 하자. 선분** AB **의 길이를** $l(t)$**라 할 때,** $\lim_{t \to \infty} \frac{l(t)}{t\sqrt{t}}$ **의 값을 구하시오. (단,** $t \neq 0$**) (15점)**

$Q(f(t), g(t))$에서의 곡선 D의 접선의 방정식은 $y = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}(x - f(t)) + g(t)$이므로

$A\left(\alpha, \dfrac{\alpha^2}{2}\right)$, $B\left(\beta, \dfrac{\beta^2}{2}\right)$라고 하면 α, β는 이차방정식 $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{g'(t)}{f'(t)}x + \dfrac{g'(t)f(t)}{f'(t)} - g(t) = 0$의 두 실근이다. 이때 근과 계수의 관계에 따라 $\alpha + \beta = \dfrac{2g'(t)}{f'(t)}$, $\alpha\beta = \dfrac{2g'(t)f(t)}{f'(t)} - 2g(t)$이며

$f'(t) = 1 - \dfrac{1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$, $g'(t) = t - \dfrac{t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$, $\dfrac{g'(t)}{f'(t)} = t$이므로 $\alpha + \beta = 2t$,

$\alpha\beta = t^2 - 2\sqrt{t^2+1}$, $l(t) = \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + \left(\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{2}\right)^2} = \sqrt{8(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$ 이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{l(t)}{t\sqrt{t}} = \lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{8(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}}{t\sqrt{t}} = 2\sqrt{2}$ 이다.

[2-3] $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{1}{t} f(t) g'(t) dt$ **의 값을 구하시오. (10점)**

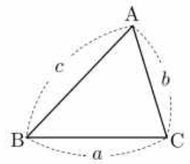
$\dfrac{g'(t)}{f'(t)} = t$이고 $f(\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $f(2\sqrt{2}) = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$이므로 $u = f(t)$라고 하면

$$\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{1}{t} f(t) g'(t) dt = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} f(t) f'(t) dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{4\sqrt{2}}{3}} u\,du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{4\sqrt{2}}{3}} = \frac{101}{72}$$ 이다.

【문항 3】 다음 제시문을 읽고 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

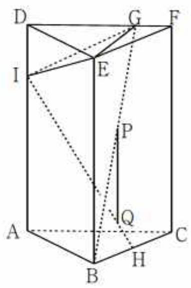
(가) 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 a, b, c일 때 다음이 성립한다.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



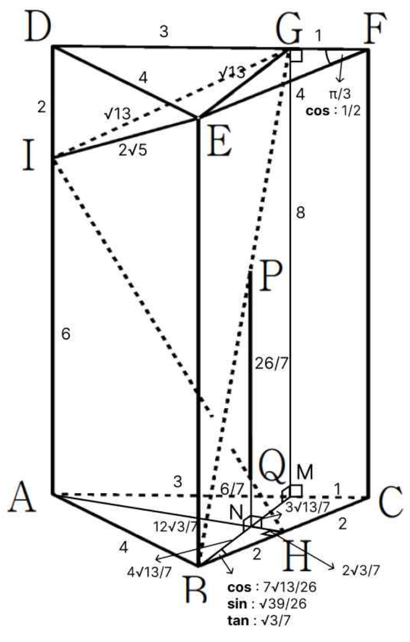
(나) 평면 β 위의 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라 하면 $S' = S\cos\theta$이다.

두 밑면은 한 변의 길이가 4인 정삼각형이고 옆면은 모두 직사각형인 삼각기둥 DEF－ABC가 있다. 이 삼각기둥의 높이는 8이다. 선분 DF 위에 점 G를 $\overline{\mathrm{FG}}=1$이 되도록 잡고, 선분 BC의 중점을 H, 선분 AD 위의 한 점을 I라 하자. 선분 BG 위의 한 점 P와 선분 HI 위의 한 점 Q에 대하여 직선 PQ는 밑면과 수직이고, $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{26}{7}$이다. 다음 물음에 답하시오.



[3-1] 선분 AI의 길이를 구하시오. (10점)

$\overline{AI} = 6$이다. (아래 그림 참고)



[3-2] 삼각형 EGI와 그 내부의 점 R에 대하여 삼각형 PQR의 넓이를 T라 할 때,

$\frac{13}{7} \le T \le \frac{13\sqrt{7}}{14}$을 만족시키는 모든 점 R가 나타내는 영역의 넓이를 구하시오. (25점)

$\frac{13}{7} \le T \le \frac{13\sqrt{7}}{14}$일 때 점 R과 선분 PQ 사이의 거리를 L이라 하면 $1 \le L \le \frac{\sqrt{7}}{2}$이다. 이때 점 R이 나타내는 도형을 S, S의 평면 ABC 위로의 정사영을 S'라고 하자. 평면 ABC와 선분 PQ가 수직이면서 ΔEGI의 평면 ABC 위로의 정사영은 ΔEGD 와 같으므로 영역 S'은 $\frac{13}{7} \le \Delta PQR' = T' \le \frac{13\sqrt{7}}{14}$을 만족시키는 평면 ABQ 위의 모든 점 R'가 나타내는 도형의 넓이와 같다. 따라서 점 R'과 선분 PQ 사이의 거리를 L'이라 하면 마찬가지로 $1 \le L' = \overline{R'N} \le \frac{\sqrt{7}}{2}$을 만족한다. 이때 점 N과 선분 AB, AC 사이의 거리가 모두 $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 이상이므로 S'의 넓이는 반지름이 각각 $\frac{\sqrt{7}}{2}$, 1인 두 반원의 넓이의 차인 $\frac{3}{8}\pi$와 같다. 여기서 평면 EGI와 평면 ABC가 이루는 각을 α라고, $\Delta EGI = L$라고 하면 $L = 2\sqrt{10}$ 이고 $\Delta ABQ = L\cos\alpha = 3\sqrt{3}$이므로 $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$, $S' = S\cos\alpha$, $S = \frac{\sqrt{30}}{12}\pi$이다.