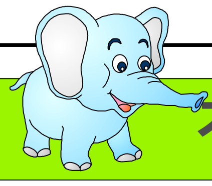
2025학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역(공동) 해설지

Epsilon



정답 및 해설

1) [정답] ① (출제자 : 23 한승수)

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\left(\frac{3}{\sqrt[3]{9}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{3^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=3^{\frac{1}{6}}$$

2) [정답] ④ (출제자 : 24 김진)

[출제의도] 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x)=2x^3-5x-3$ 에서

$f'(x)=6x^2-5$

이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=f'(-1)=1$$

3) [정답] ① (출제자 : 23 임하준)

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$

$=(-\sin\theta)\times(-\cos\theta)$

$=\sin\theta\cos\theta$

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos^2\theta=\frac{5}{9}$ 이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 에서 $\sin\theta>0$ 이므로 $\sin\theta=\frac{2}{3}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{5}}{9}$

4) [정답] ② (출제자 : 24 박예림)

[출제의도] 함수의 연속의 정의를 이해하고 이를 이용하여 미정계수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하려면

$\lim_{x\to a-}(x^2+2x+k)=\lim_{x\to a+}(6x+1)$ 인 a 가 존재해야 한다.

곧, $a^2-4a+k-1=0$

그런데 a 가 오직 하나 존재하므로 방정식 $a^2-4a+k-1=0$ 이 중근을 가져야 한다.

따라서 $k=5$

5) [정답] ③ (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 등차수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차를 각각 a, d (a, d 는 실수)라 하자.

$a_5+2a_8=a+4d+2(a+7d)=3a+18d$

$3a+18d=a_9=a+8d$

$2a+10d=2(a+5d)=0$ 이므로 $a_6=0$ 이다.

$a_4\times a_8=(a_6-2d)\times(a_6+2d)=-4d^2$ 이므로

$-4d^2=-16$

$d=2$ 또는 $d=-2$

따라서 $|a_{10}|=|a_6+4d|=8$

[별해]

등차중항을 이용하면 문제를 더욱 간단히 해결할 수 있다.

$2a_8=a_7+a_9$ 이므로

$a_5+2a_8=a_5+a_7+a_9=a_9$

그러므로 $a_5+a_7=2a_6=0$, $a_6=0$

6) [정답] ⑤ (출제자 : 24 김시현)

[출제 의도] 함수의 극대, 극소를 활용할 수 있는가?

[해설]

$f(x)=x^3+ax^2+4x+3$ 에서

$f'(x)=3x^2+2ax+4$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$ 에서 극댓값 3을 가지면

$f(\alpha)=3$, $f'(\alpha)=0$

$\alpha^3+a\alpha^2+4\alpha=0$ ⋯ ㉠

$3\alpha^2+2a\alpha+4=0$ ⋯ ㉡

식 ㉡에서 $\alpha\neq 0$ 이고

식 ㉠, 식 ㉡을 연립하면 $\alpha^2=4$

곧, $\alpha=-2$, $a=4$ 또는 $\alpha=2$, $a=-4$ 인 경우로 나눌 수 있다.

i) $\alpha=-2$, $a=4$ 인 경우

$f'(x)=3x^2+8x+4=(3x+2)(x+2)$ 이므로

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=-\frac{3}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=-2$ 에서 극댓값 3을 가진다.

ii) $\alpha=2$, $a=-4$ 인 경우

$f'(x)=3x^2-8x+4=(3x-2)(x-2)$ 이므로

$f'(x)=0$ 에서 $x=2$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}$ 에서 극댓값 $\frac{113}{27}$ 을 가진다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$ 에서 극댓값 3을 가지고

$a=4$

7) [정답] ⑤ (출제자 : 24 장경정)

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그가 포함된 방정식의 해를 구할 수 있는가?

[해설]

$a-b=2$ 이므로 $a=b+2$

따라서 $\log_{a+1}\sqrt{b^2-9}=\log_{b+3}\sqrt{b^2-9}$

로그의 밑과 진수 조건에 의해 $b+3>0$, $b+3\neq 1$, $b^2-9>0$ 이므로 $b>3$ 이다.

$\log_{b+3}\sqrt{b^2-9}$

$=\log_{(b+3)^2}(b^2-9)$

$=\log_{(b+3)^2}\{(b+3)(b-3)\}$

$=\log_{(b+3)^2}(b+3)+\log_{(b+3)^2}(b-3)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_{b+3}(b-3)$

$=\frac{3}{4}$

따라서 $\log_{(b+3)}(b-3)=\frac{1}{2}$

로그의 정의에 의해 $\sqrt{b+3}=b-3$ 이다.

양변을 제곱하면

$b+3=b^2-6b+9$

$b^2-7b+6=0$

$b=1$ 또는 $b=6$.

그러나 $3<b$ 이므로 $b=6$, $a=8$

$a\times b=48$

8) [정답] ⑤ (출제자 : 23 박정인)

[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

선분 $\overline{\mathrm{O'P}}$ 와 $\overline{\mathrm{O'Q}}$ 는 $(a,0)$을 중심으로 하고 반지름이 t 인 원의 반지름이므로 $\overline{\mathrm{O'P}}^2=\overline{\mathrm{O'Q}}^2=t^2$

따라서 $\mathrm{P}(m,-m)$, $\mathrm{Q}(n,n)$ (단, $m<0$, $n>0$)이라 하면

$\overline{\mathrm{O'P}}^2=(a-m)^2+m^2$, $\overline{\mathrm{O'Q}}^2=(n-a)^2+n^2$ 이므로

곧, $m+n=a$

삼각형 $\mathrm{OO'Q}$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OO'}}\times n$ 이고,

삼각형 $\mathrm{POO'}$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OO'}}\times(-m)$ 인데

삼각형 $\mathrm{OO'Q}$ 의 넓이가 삼각형 $\mathrm{POO'}$ 의 넓이의 2 배이므로

곧, $n=-2m$

$m+n=a$, $n=-2m$ 이므로

$m=-a$ 이고,

$\overline{\mathrm{O'P}}^2=(a-m)^2+m^2=t^2$ 이므로

$5a^2=t^2$

곧, $a=\frac{1}{\sqrt{5}}t$

따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{a^2}=\frac{t^2}{\frac{t^2}{5}}=5$

9) [정답] ④ (출제자 : 24 이학송)

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 두 수의 곱을 구할 수 있는가?

[해설]

원이 x 축에 접하므로 원의 반지름의 길이는 a 이다.

$\overline{\mathrm{A_1B}}=a$

삼각형 $\mathrm{A_1A_2B}$ 는 이등변삼각형이므로 점 B 에서 선분 $\mathrm{A_1A_2}$ 에 수선의 발을 H 라 하면 선분 $\mathrm{A_1A_2}$ 는 수직이등분되고

선분 BH 의 길이는 $\frac{a}{2}$ 이다.

따라서, 삼각형 $\mathrm{A_1HB}$ 은 직각삼각형이므로

선분 $\mathrm{A_1A_2}$ 의 길이는 $\sqrt{3}a$ 이다.

점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$ 는 $y=\frac{a}{2}$ 와의 교점이므로 $a\sin(b\pi x)=\frac{a}{2}$

$b\pi x=\frac{1}{6}$ 또는 $b\pi x=\frac{5}{6}$ 이므로

점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$ 의 x 좌표는 각각 $\frac{1}{6b}$, $\frac{5}{6b}$ 이다.

따라서 $\sqrt{3}a=\frac{4}{6b}$ 이므로 $a\times b=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

10) [정답] ② (출제자 : 24 배지희)

[출제의도] 미분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점의 가속도를 구할 수 있는가?

[해설]

$x_1(t)=t^3-at^2+at$, $x_1{}'(t)=v_1(t)=3t^2-2at+a$

$x_2(t)=t^2-7t$, $x_2{}'(t)=v_2(t)=2t-7$

$3t^2-2at+a=2t-7$, $3t^2-2(a+1)t+a+7=0$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각이 $t=t_0$ 뿐인 경우는

$3t^2-2(a+1)t+a+7=0$의 실근을 통해 알 수 있다.

(i) $3t^2-2(a+1)t+a+7=0$이 음의 실근과 양의 실근을 각각 하나씩 가질 경우

$3t^2-2(a+1)t+a+7=0$의 두 실근을 각각 α, β라 하자.

$\alpha\beta=\dfrac{a+7}{3}<0$

$a<-7$이므로 성립하지 않는다. $(a>0)$

(ii) $3t^2-2(a+1)t+a+7=0$이 중근을 가질 경우

$\dfrac{D}{4}=a^2+2a+1-3a-21=(a-5)(a+4)=0$

$a=5$ $(a>0)$이다.

즉, $3t^2-2(a+1)t+a+7=t^2-4t+4=(t-2)^2=0$ 이므로

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각은 $t=2$이다.

따라서

$v_1{}'(t)=a_1(t)=6t-10$, $a_1(2)=2$

$v_2{}'(t)=a_2(t)=2$

$a_1(2)+a_2(2)=4$

11) [정답] ④ (출제자 : 23 이나경)

[출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

i) $r=1$

$S_n=3n$이므로 $3(n+1)=2\times 3n+k$가 모든 자연수 n에 대하여 성립해야 한다. 그러나 이 식은 $n=1-\dfrac{k}{3}$일 때만 성립하므로 모순.

ii) $r\neq 1$

첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\dfrac{3(r^n-1)}{r-1}$이다.

$S_{n+1}=2S_n+k$, $S_{n+1}-S_n=S_n+k$, $a_{n+1}=S_n+k$

여기서 $a_{n+1}=3\times r^n$이므로

$3r^n=\dfrac{3(r^n-1)}{r-1}+k$, $3r^{n+1}-3r^n=3r^n-3+k(r-1)$,

$(3r-6)r^n=k(r-1)-3$ $\cdots$ (*)

(*)이 모든 자연수 n에 대하여 성립하므로 $3r-6=0$, $r=2$,

이것을 다시 (*)에 대입하면 $k-3=0$, $k=3$.

$a_3=3\times 2^{3-1}=12$

따라서, $a_3+k=12+3=15$

[별해]

$r\neq 1$일 때 $a_{n+1}=S_n+k$로 식을 변형하지 못했더라도 직접 $S_n=\dfrac{3(r^n-1)}{r-1}$을 대입하여 식을 정리하면 같은 결과를 얻을 수 있다.

12) [정답] ② (출제자 : 23 박정인)

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 함수를 찾을 수 있는가?

[해설]

(가)의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면,

$x^2f(x)-xg(x)=-2x^3-8x^2-6x$

곧, $xf(x)-g(x)=-2x^2-8x-6$

(나)조건에 의해 $f(x)$의 최고차항의 차수가 n차이면, $f'(x)$의 최고차항의 차수는 $n-1$차이고, $g(x)$의 최고차항의 차수는 $2n-1$차가 된다.

그런데 $f(x)$의 최고차항의 차수가 3차 이상이면 $xf(x)$의 최고차항의 차수는 4차 이상, $g(x)$의 최고차항의 차수는 5차 이상이므로 $xf(x)-g(x)$의 최고차항의 차수가 5차 이상으로 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $f(x)$의 최고차항의 차수가 1차일 때와 2차일 때로 경우를 나눠볼 수 있다.

(i) $f(x)$의 최고차항의 차수가 1차일 때,

$f(x)=ax+b$라 하면, $g(x)=\dfrac{(ax+b)\times a}{2}=\dfrac{a^2}{2}x+\dfrac{ab}{2}$

$xf(x)-g(x)=ax^2+\left(b-\dfrac{a^2}{2}\right)x-\dfrac{ab}{2}=-2x^2-8x-6$

곧, $a=-2$, $b=-6$

(ii) $f(x)$의 최고차항의 차수가 2차일 때,

$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$라 하면, $g(x)=\dfrac{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\times(2\alpha x+\beta)}{2}$

그런데 $f(x)$의 최고차항의 차수가 2차인 경우, $xf(x)$와 $g(x)$의 최고차항의 차수는 3차인데 $xf(x)-g(x)$의 최고차항의 차수가 2차이므로 $xf(x)-g(x)$의 3차 항의 계수는 0이어야 한다.

$\alpha-\alpha^2=0$ 곧, $\alpha=1\ (a\neq 0)$

따라서 $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$, $g(x)=\dfrac{(x^2+\beta x+\gamma)\times(2x+\beta)}{2}$이므로

$xf(x)-g(x)=-\dfrac{\beta}{2}x^2-\dfrac{\beta^2}{2}x-\dfrac{\beta\gamma}{2}=-2x^2-8x-6$

곧, $\alpha=1$, $\beta=4$, $\gamma=3$

$f(x)=-2x-6$ 또는 $f(x)=x^2+4x+3$일 때 조건을 만족시킨다.
따라서 $f(2)$의 최댓값은 15

13) [정답] ① (출제자 : 23 이나경)

[출제의도] 함수의 극한과 연속을 이해하고 있는가?

[해설]

$h(3)=0\neq 2$이므로 $f(3)=0$

따라서 $f(x)$는 $(x-3)$을 인수로 가진다.

$f(x)$와 $g(x)$가 최고차항의 계수가 각 1, -1인 삼차함수이기 때문에, $f(x)+g(x)$는 2차 이하의 다항함수이다. 이때 $f(x)+g(x)$가 2차 또는 0차이면, $\dfrac{f(x)}{f(x)+g(x)}$의 최고차항의 차수는 1차 또는 3차이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=\infty$ 또는 $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\infty$가 성립하여 $h(x)$의 최댓값이 존재하지 않는다. 따라서 $f(x)+g(x)$는 1차 함수이다.

이때 $f(k)+g(k)=0$을 만족하는 k에 대하여 $f(k)\neq 0$이면 $\lim\limits_{x\to k-}h(x)=\infty$ 또는 $\lim\limits_{x\to k+}h(x)=\infty$이기 때문에, $f(x)+g(x)$가 $(x-k)$를 인수로 가지면 $f(x)$와 $g(x)$ 또한 $(x-k)$을 인수로 가져야 한다.

한편 $h(x)$는 $f(x)+g(x)\neq 0$일 때는 자명하게 연속이고, $f(x)+g(x)=0$인 점에서만 불연속일 수 있다.
여기서 $f(x)+g(x)$가 다항함수이므로 $f(x)+g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 0이거나, 특정 점에서만 0일 수 있다. 만일 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+g(x)=0$이라면 $h(x)=2$이기 때문에, $x=1$과 $x=2$뿐만 아닌 실수 전체에서 최댓값 2를 가지므로 모순이다. 따라서 $h(x)$는 특정 점에서만 불연속이다.
$h(x)$가 특정 점에서만 불연속이기 때문에 $x=a$에서 연속이라면

$\lim\limits_{x\to a}h(x)=h(a)=\dfrac{f(a)}{f(a)+g(a)}$이고, $x=a$에서 불연속이라면

$\lim\limits_{x\to a}h(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{f(x)+g(x)}$이다.

다시 말해 $f(a)+g(a)\neq 0$이면

$\lim\limits_{x\to a}h(x)+h(a)=2\times\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{f(x)+g(x)}$이고,

$f(a)+g(a)=0$이면 $\lim\limits_{x\to a}h(x)+h(a)=2+\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{f(x)+g(x)}$이다.

i) $f(1)+g(1)=0$, $f(2)+g(2)=0$

$f(x)+g(x)$가 $(x-1)(x-2)$를 인수로 가져야 한다. $f(x)+g(x)$는 일차함수이므로 모순이다.

ii) $f(1)+g(1)=0$, $f(2)+g(2)\neq 0$

$f(x)+g(x)$, $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x-1$을 인수로 가져야 한다. 이때, $h(1)=2$이므로 $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=0$이어야 하고, 즉, $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 가진다. 이때 $f(x)=(x-1)^2(x-3)$, $g(x)=(x-1)\times Q(x)$라고 하자.

$f(2)+g(2)\neq 0$에서 $\dfrac{2f(2)}{f(2)+g(2)}=\dfrac{2(2-1)(2-3)}{Q(2)2+(2-1)(2-3)}=2$,

$Q(2)=0$.

$\therefore Q(x)=(x-2)(-x+q)$,

$\dfrac{f(x)}{f(x)+g(x)}=\dfrac{(x-1)^2(x-3)}{(x-1)\{(q-2)x+3-2q\}}$

$f(x)+g(x)$가 일차함수여야 하므로 $q-2=0$, $q=2$이다.

$$h(x)=\begin{cases}-(x-1)(x-3) & (f(x)+g(x)\neq 0)\\ 2 & (f(x)+g(x)=0)\end{cases}$$

$\therefore h(4)=-3$

iii) $f(1)+g(1)\neq 0$, $f(2)+g(2)=0$

$f(x)+g(x)$, $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x-2$을 인수로 가져야 한다. 이때, $h(2)=2$이므로 $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=0$이어야 하고, 즉, $f(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 가진다. 이때 $f(x)=(x-2)^2(x-3)$, $g(x)=(x-2)\times Q(x)$라고 하자.

$f(1)+g(1)\neq 0$에서 $\dfrac{2f(1)}{f(1)+g(1)}=\dfrac{2(1-2)(1-3)}{Q(1)+(1-2)(1-3)}=2$,

$Q(1)=0$.

$\therefore Q(x)=(x-1)(-x+q)$,

$$\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}=\frac{(x-2)^2(x-3)}{(x-2)\{(q-4)x+6-q\}}$$

$f(x)+g(x)$ 가 일차함수여야 하므로 $q-4=0$, $q=4$ 이다. 즉,

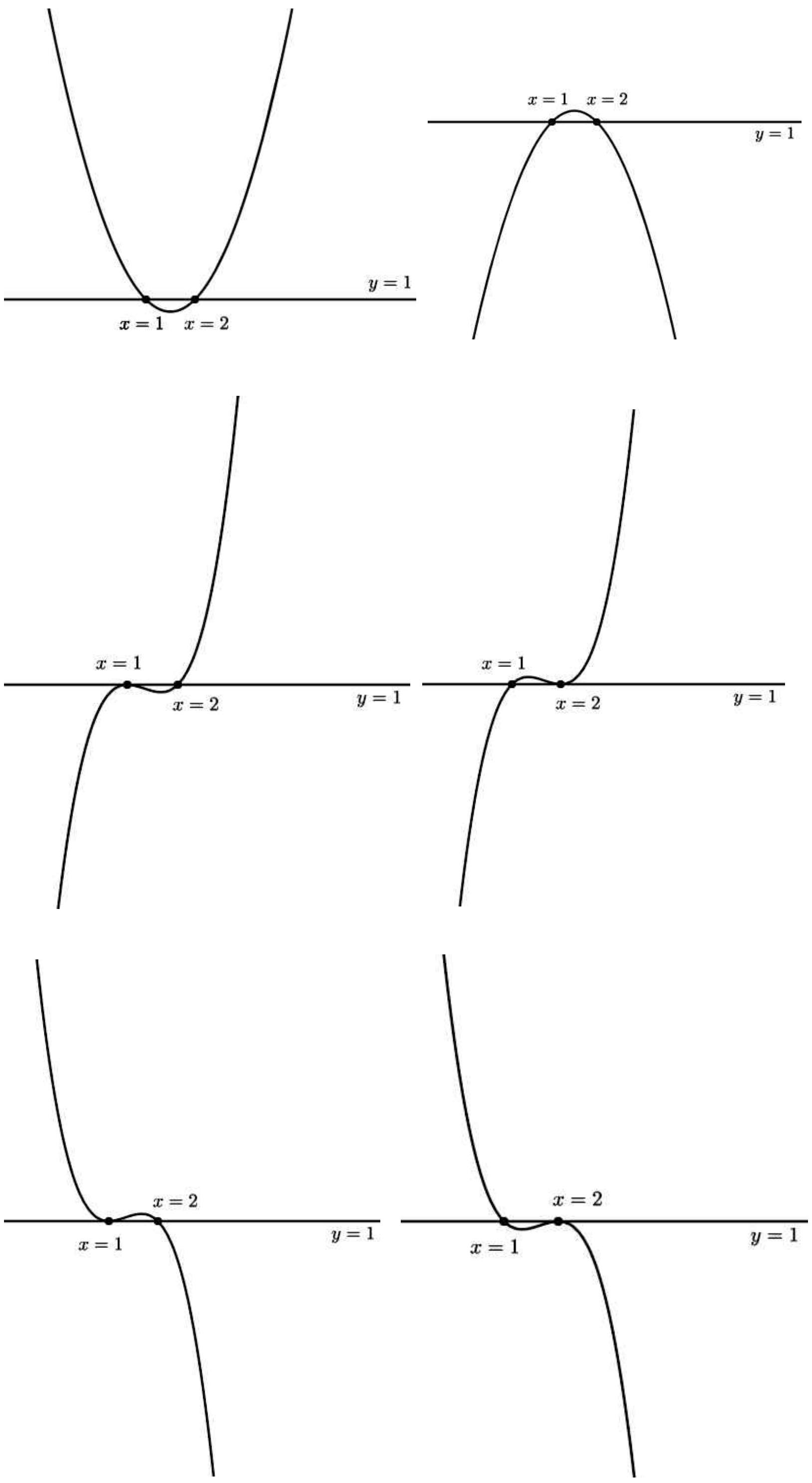
$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-2)(x-3) & (f(x)+g(x)\neq 0)\\ 2 & (f(x)+g(x)=0)\end{cases}$$

이때 $\lim_{t\to x} h(t)+h(x)$ 의 최댓값이 존재하지 않으므로 모순이다.

iv) $f(1)+g(1)\neq 0$, $f(2)+g(2)\neq 0$

$f(x)+g(x)$ 는 최고차가 2차 이하이고, $f(x)$ 는 3차 함수이므로 $\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}$ 는 최고차가 1, 2, 3차 중 하나인 어떤 다항함수 $A(x)$ 의 정의역을 $\{x|f(x)+g(x)\neq 0$ 인 모든 실수 $x\}$ 로 제한한 형태이다.

여기서 $\frac{f(1)}{f(1)+g(1)}=\frac{f(2)}{f(2)+g(2)}=1$ 이므로 $A(x)$ 는 1차 함수일 수 없다. 즉, 가능한 $A(x)$ 의 개형은 다음과 같다.



모든 경우에 $\lim_{t\to x} h(t)+h(x)$ 가 최댓값을 가질 수 없으므로 모순이다.

$\therefore h(4)=-3$

14) [정답] ③ (출제자 : 23 채상진)

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 역함수 관계이다.

함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 t 의 부호에 따라 각각 치역과 정의역의 부호가 바뀐다.

i) $t>0$ 일 때

직선 $y=-x+t$ 가 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 접하는 점을 지날 때와 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 교점을 지날 때만 $h(t)=1$ 이고 그 외에는 항상 $h(t)=2$ 이다.

함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 교점은 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 교점과 같다. 따라서 $y=f(x)$ 와 $y=x$, $y=-x+t$ 가 만나는 교점에서 $h(t)=1$ 이다.

교점에서의 상황을 살펴보자.

$y=x$ 와 $y=-x+t$ 는 $\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right)$ 에서 만난다.

$y=\frac{2^x+5}{t}$ 에 대입하면

$\frac{2^t+5}{t}=\frac{t}{2}$ 즉, $2^{\frac{t}{2}}+5=\frac{t^2}{2}$ 이다.

정수 t 에 대해서

$t=2n$ (n 은 양의 정수) 라면

$2^n+5=2n^2$

좌변은 홀수, 우변은 짝수이므로 성립하지 않는다.

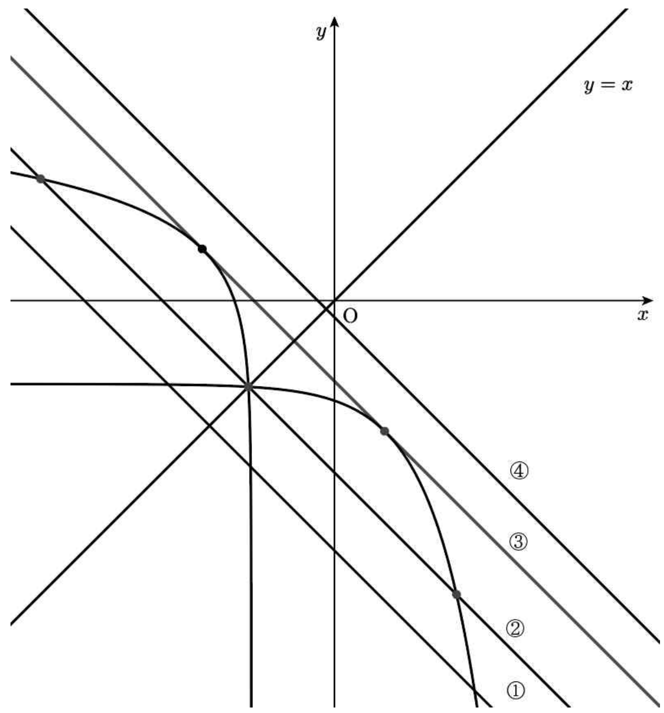
$t=2n-1$ 라면

$2^{\frac{2n-1}{2}}+5=\frac{(2n-1)^2}{2}$

좌변은 무리수, 우변은 유리수이므로 성립하지 않는다.

따라서 $t>0$ 일 때, $h(t)=2$ 이므로 $\sum_{n=6}^{10} h(2n-10)=10$ 이다.

ii) $t<0$ 일 때



함수 $f(x)$와 $y=-x+t$가 y축 위에서 만난다면 ②와 ③사이에 있는 상황이다.

함수 $f(x)$의 y절편은 $f(0)=\frac{6}{t}$, $y=-x+t$의 y절편은 t이다.

$t=\frac{6}{t}$, $t=-\sqrt{6}$

$t=-\sqrt{6}$에서 함수 $f(x)$와 $y=-x+t$가 y축 위에서 만난다.

함수 $f(x)$와 $g(x)$의 교점은 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점과 같다. 따라서 $y=f(x)$와 $y=x$, $y=-x+t$가 만나는 교점에서 $h(t)=3$이다.

교점에서의 상황을 살펴보자.

$y=x$와 $y=-x+t$는 $\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right)$에서 만난다.

$y=\frac{2^x+5}{t}$에 대입하면

$2^{\frac{t}{2}}+5=\frac{t^2}{2}$ 이다.

정수 t에 대해서

$t=2n$ (n은 음의 정수) 라면

$2^n+5=2n^2$

좌변은 홀수, 우변은 짝수이므로 성립하지 않는다.

$t=2n+1$ 라면

$2^{\frac{2n+1}{2}}+5=\frac{(2n+1)^2}{2}$

좌변은 무리수, 우변은 유리수이므로 성립하지 않는다.

따라서 $t<-\sqrt{6}$ 부터는 $h(t)=4$이고

$\sum_{n=1}^{3} h(2n-10)=4\times 3+0=12$

$\therefore \sum_{n=1}^{3} h(2n-10)+\sum_{n=6}^{10} h(2n-10)=22$

15) [정답] ③ (출제자 : 24 권서현)

[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 그래프의 개형을 추론할 수 있는가?

[해설]

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(a)=2a-\frac{b}{2}$

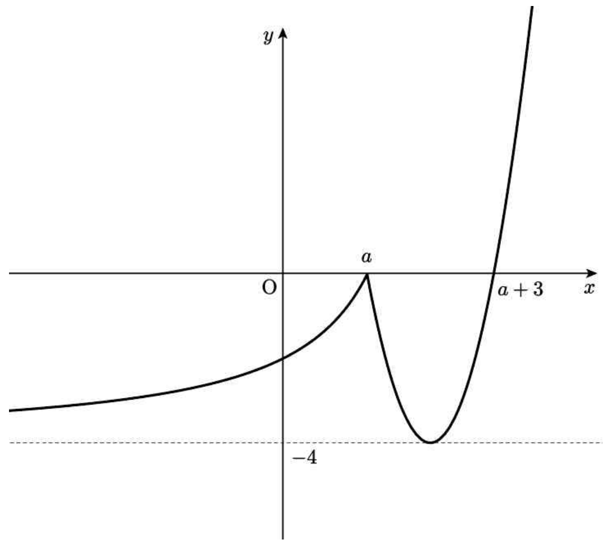
또 (가) 조건에서 $g(x)$의 최솟값이 -4이므로

$y=\frac{-4x+b}{x-a-2}$는 점근선 기준으로 제 2 사분면과 제 4 사분면에 위치해야 한다

따라서 $f(x)$의 극솟값이 -4

이때 $g(x)=0$이 적어도 두 실근을 가지므로 아래의 두 경우가 가능하다

ⅰ) $g(x)=0$이 두 근을 가질 때

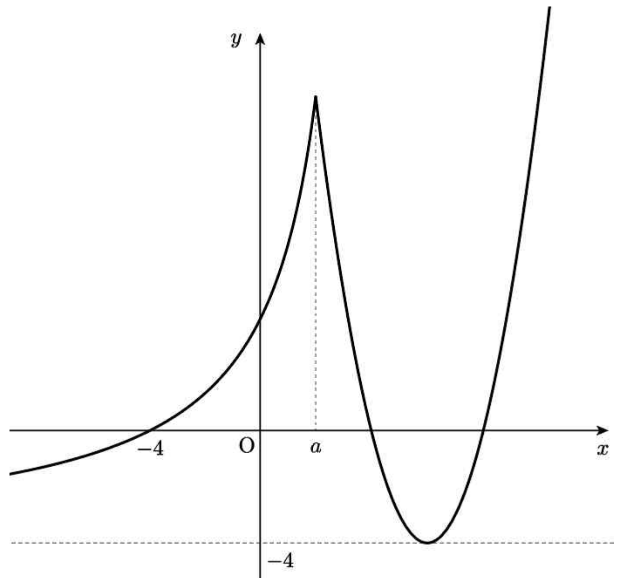


(다) 조건에서 구간 $[-4, -2]$에서

$\int_{-4}^{x} g(t)\{|(t+4)^2(t+2)(t-8)|+(t+4)^2(t+2)(t-8)\}dt<0$

이므로 조건에 위배

ⅱ) $g(x)=0$이 서로 다른 세 근을 가질 때



$-2\le x\le 8$에서 x값에 관계없이 (다) 조건이 성립하므로

구간 $[-\infty, -4]$에서 $g(x)\le 0$, 구간 $[-4, -2]$에서 $g(x)\ge 0$

이므로 $g(-4)=0$, $b=-16$

(나) 조건에서 $g(x)=0$의 세 근의 합이 $2a+4$이므로 $f(x)$의 두 근의 합이 $2a+8$이다. 따라서 $f(x)$의 축은 $x=a+4$이므로

$f(x)=(x-a-4)^2-4$

$f(a)=2a-\frac{b}{2}=2a+8$이므로 $a=2$

따라서 $\int_0^2 f(x)g(x)\,dx=-4\int_0^2 (x+4)(x-8)\,dx=\frac{832}{3}$

$\therefore 3\int_0^2 f(x)g(x)\,dx=832$

16) [정답] 9 (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

[해설]

방정식 $(9x)^{\log_3 x} = 27x^4$ 의 양변에 3 을 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_3 (9x)^{\log_3 x} = \log_3 (27x^4)$

$(\log_3 x)\{\log_3 (9x)\} = 3 + 4\log_3 x$

$(\log_3 x)^2 + 2\log_3 x = 3 + 4\log_3 x$

$(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0$

방정식 $(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0$ 의 두 실근이 $x = \alpha$, $x = \beta$ 라 할 때,

$\log_3 x = t$ 라고 치환하면

방정식 $t^2 - 2t - 3 = 0$ 의 두 실근은 $t = \log_3 \alpha$, $t = \log_3 \beta$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = \log_3 \alpha\beta = 2$ 이다.

따라서 $\alpha\beta = 3^2 = 9$

17) [정답] 21 (출제자 : 24 오현민)

[출제의도] 함수의 부정적분과 적분상수를 구하여 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]

$f'(x) = 3x^2 + 6x$ 이므로 $f'(x)$ 의 한 부정적분은

$\int (3x^2 + 6x)\,dx = x^3 + 3x^2 + C$ (단, C 는 적분상수)

이때 $f(1) = 5$ 이므로 $C = 1$ 에서 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

따라서 $f(2) = 21$

18) [정답] 100 (출제자 : 24 배지희)

[출제의도] 합의 기호 $\sum$의 성질을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

모든 자연수 n에 대하여 $(a_n + b_n)^2 \geq 0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{10} (a_n + b_n)^2 \geq 0$

$\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k)^2 = 0$ 이므로

$(a_k + b_k)^2 = 0$, $a_k + b_k = 0$

즉, $a_k = -b_k$ 이어야 한다.

따라서, $a_k = -b_k$, $\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 = 25$ 이므로

$\sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k)^2 = \sum_{k=1}^{10} \{a_k - (-a_k)\}^2 = 4\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 = 100$

19) [정답] 8 (출제자 : 23 박정인)

[출제의도] 주어진 부등식을 만족시키는 함수를 찾을 수 있는가?

[해설]

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 -1 이고 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이므로 $f(x)g(x)$ 의 최고차항의 계수는 -1 이다.

곧, (가)조건에 의해 $f(x)g(x) = -(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$

그런데 (나)조건에서 $f(x) \leq g(x)$ 를 만족시키는 x 값의 범위는 $x \geq 2$ 이므로 함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)$ 는 점 $(2, 0)$ 을 지나야 한다.

따라서 세 가지의 경우로 나눠볼 수 있다.

(i) $f(x) = -(x-1)^2(x-2)$, $g(x) = (x-2)(x-3)^2$ 인 경우,

$f(x) \leq g(x)$ 를 만족시키는 x 값의 범위는 $x \geq 2$ 이고,

$f(1) < f\left(\frac{3}{2}\right)$ 이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $f(x) = -(x-1)(x-2)(x-3)$, $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ 인 경우,

$f(x) \leq g(x)$ 를 만족시키는 x 값의 범위는 $1 \leq x \leq 2$, $x \geq 3$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $f(x) = -(x-2)(x-3)^2$, $g(x) = (x-1)^2(x-2)$ 인 경우,

$f(x) \leq g(x)$ 를 만족시키는 x 값의 범위는 $x \geq 2$ 이지만

$f(1) > f\left(\frac{3}{2}\right)$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $f(x) = -(x-1)^2(x-2)$, $g(x) = (x-2)(x-3)^2$ 인 경우 조건을 만족시키므로 $f(3) + g(5) = -4 + 12 = 8$

20) [정답] 70 (출제자 : 24 이학송)

[출제의도] 사인법칙과 코사인 법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

[해설]

선분 AC 와 선분 BC 가 원 O 에 접하므로 $\overline{\mathrm{PC}} = 2$

삼각형 PQS 는 $\angle \mathrm{PQC} = \angle \mathrm{QPC} = \frac{\pi}{4}$, $\overline{\mathrm{PQ}} = 2\sqrt{2}$ 인 직각이등변삼각형이다.

따라서, 점 P 와 점 Q 를 연결하면 $\angle \mathrm{PSQ} = \frac{\pi}{4}$ 이다.

삼각형 SQP 에서 O 의 반지름을 r 이라 하고 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{QP}}}{\sin(\angle \mathrm{QSP})} = 2\mathrm{r}$ 이므로

$\frac{2\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}} = 4 = 2r$

따라서 $r = 2$ 이다.

$\angle \mathrm{SPQ} = \theta$ 라고 하면 $\angle \mathrm{SRQ} = \pi - \theta$ 이고 삼각형 SRQ 는

$\angle \mathrm{SQR} = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{SQ}} = 4\sin\theta$ 이다.

삼각형 SQC 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4\sin\theta \times 2 \times \sin(\pi - \theta) = \frac{25}{8}$ 이므로

$\sin\theta = \frac{5\sqrt{2}}{8}$ 이다.

삼각형 SPQ 에서 $\overline{\mathrm{PS}} = x$ 라 하면 코사인 법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = \overline{\mathrm{SQ}}^2 + \overline{\mathrm{SP}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{SQ}} \times \overline{\mathrm{SP}} \times \cos(\angle \mathrm{BAC})$

$(2\sqrt{2})^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + x^2 - 2 \times \frac{5\sqrt{2}}{2} \times x \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x^2 - 5x + \frac{9}{2} = 0$

근의 공식에 의하여 $x = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$

따라서 $p=5$, $q=7$, $r=2$ 이다.

$\therefore\ p \times q \times r = 70$

21) [정답] 12 (출제자 : 24 우효정)

[출제의도] 사잇값정리와 미분계수의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$x^2 - 2x + 1 \le f(x) \le x^2 - x - 2 \ \cdots$ ㉠

에서

$x^2 - 2x + 1 = x^2 - x - 2$

$x - 3 = 0$, $x = 3$

㉠에 $x=3$ 을 대입하면

$4 \le f(3) \le 4$

이므로 $f(3) = 4$

㉠에서 양변에 $f(3)$ 를 빼면

$x^2 - 2x - 3 \le f(x) - f(3) \le x^2 - x - 6$

$(x+1)(x-3) \le f(x) - f(3) \le (x+2)(x-3)$

$f(x) - f(3)$ 은 $x \ge 3$ 일 때, $x^2 - 2x - 3 \le x^2 - x - 6$ 이므로 주어진 부등식을 만족시킨다. 따라서 $k \ge 3$ 이다.

$x + 1 \le \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \le x + 2$ (단, $x > 3$)

$\lim_{x \to 3+} x + 1 \le \lim_{x \to 3+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \le \lim_{x \to 3+} x + 2$

$4 \le f'(3) \le 5$ 이다.

$k \ge 3$ 이므로 k 의 최솟값은 $k = 3$ 이다. 따라서 $a = 3$ 이므로 $12 \le 3f'(3) \le 15$ 에서 $af'(a)$ 의 최솟값은 12

22) [정답] 14 (출제자 : 23 강주연)

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 조건을 만족시키는 수열의 항의 합을 구할 수 있는가?

[해설]

n 이 홀수인 경우 $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{(n+1)+1}$ 이고 $n+1$ 은 짝수이다.

따라서 n 이 짝수인 경우 $a_n = a_{n+1}$ 이므로

$a_{n+2} = a_n + \frac{2a_{n+1}}{n+1} = a_{n+1} + \frac{2a_{n+1}}{n+1}$

$= \frac{n+3}{n+1} a_{n+1}$

이고 정리하면 다음과 같다.

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} & (n\text{이 홀수인 경우 }) \\ \frac{n+3}{n+1} a_{n+1} & (n\text{이 짝수인 경우 }) \end{cases}$$

위 식을 변형하면 수열 a_n 은 1 이 아닌 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{n+2}{n} a_n & (n\text{이 1 이 아닌 홀수인 경우 }) \\ a_n & (n\text{이 짝수인 경우 }) \end{cases}$$

그러므로 $a_5 = 10$ 에서 5 이상의 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$ 이고

$a_4 = a_5 = 10$

$a_3 = \frac{3}{3+2} a_4 = 6$

$a_2 = a_3 = 6$

이고 a_1 이 자연수이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 자연수이다.

제 2 항부터 짝수 번째 항을 나열하면

$a_2 = 6$, $a_4 = 10$, $a_6 = 14$, $a_8 = 18$, $\cdots$ 이고

제 3 항부터 홀수 번째 항을 나열하면

$a_3 = 6$, $a_5 = 10$, $a_7 = 14$, $a_9 = 18$, $\cdots$ 이므로

1 이 아닌 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n + 4 = a_{n+2}$ 이다.

따라서 모든 자연수 m 에 대하여

$b_{2m-1} = -a_{2m-1+a_1} < 0$ 이고 $b_{2m} = a_{2m} + a_1 > 0$ 이다.

또, $b_{2m-1} - 4 = b_{2m+1}$ 이고 $b_{2m} + 4 = b_{2m+2}$ 이므로

$b_{2m-1} + b_{2m} = b_{2m+1} + b_{2m+2} = b_1 + b_2$ 이다.

$b_1 + b_2 = -a_{1+a_1} + (a_2 + a_1) = -a_{1+a_1} + a_1 + 6$

(i) a_1 이 홀수일 때

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 의 제 a_1 항 $-a_{1+a_1}$ 이 음수이므로

$\sum_{k=1}^{a_1} b_k = b_{a_1} + \sum_{k=1}^{a_1-1} b_k = 0$ 를 만족시키려면

$\sum_{k=1}^{a_1-1} b_k = (b_1 + b_2) + \cdots + (b_{a_1-2} + b_{a_1-1}) > 0$, 즉

$b_1 + b_2 > 0$ 이어야 한다.

(i -ⓐ) $a_1 = 1$ 일 때

$\sum_{k=1}^{a_1} b_k = \sum_{k=1}^{1} b_k = b_1 \ne 0$

(i -ⓑ) $a_1 \ge 3$ 일 때

$b_1 + b_2 = -a_{1+a_1} + a_1 + 6$ 에서

$1 + a_1$ 은 짝수이므로 $-a_{1+a_1} + a_1 + 6 = -a_{2+a_1} + a_1 + 6$ 이고

$-a_{2+a_1} + a_1 + 6 = -a_{a_1} - 4 + a_1 + 6 = -a_{a_1} + a_1 + 2$

이고 a_1 이 2 커질 때 $-a_{a_1}$ 은 4 작아진다.

따라서 $-a_{a_1} + a_1 + 2 = b_1 + b_2 < 0$

그러므로 a_1 은 홀수가 아니다.

(ii) a_1 이 짝수일 때

$\sum_{k=1}^{a_1} b_k = (b_1 + b_2) + \cdots + (b_{a_1-1} + b_{a_1}) = 0$ 이므로

$b_1 + b_2 = 0$ 이어야 한다.

$b_1+b_2=-a_{1+a_1}+a_1+6$ 에서

$1+a_1$ 은 홀수이므로 $-a_{1+a_1}+a_1+6=-a_{a_1}+a_1+6$,

즉 $-a_{a_1}+a_1+6=0$ 이어야 한다.

a_1 이 2 커질 때 $-a_{a_1}$ 은 4 작아지므로 $-a_{a_1}+a_1+6$ 은 2 작아진다.

a_1 이 작은 수일 때부터 생각해 보자.

(ii-ⓐ) $a_1=2$ 일 때

$b_1=-a_{1+a_1}=-a_3=-6$, $b_2=a_2+a_1=6+2=8$ 이므로

$b_1+b_2=-6+8=2\neq 0$ 이다.

(ii-ⓑ) $a_1=4$ 일 때

$b_1=-a_{1+a_1}=-a_5=-10$, $b_2=a_2+a_1=6+4=10$ 이므로

$b_1+b_2=-10+10=0$ 이다.

(ii-ⓒ) $a_1>4$ 일 때

a_1 의 값이 4 부터 2 커질 때 b_1+b_2 의 값은 2 작아지므로

$b_1+b_2\neq 0$

(i), (ii)에 의하여 $a_1=4$ 이고, 이때 $b_2=10$

$a_1+b_2=4+10=14$

[참고]

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 다음과 같다.

$$a_n=\begin{cases} a_1 & (n=1) \\ 2n & (n\text{이 } 1\text{ 이 아닌 홀수인 경우 }) \\ 2n+2 & (n\text{이 짝수인 경우 }) \end{cases}$$

(i) a_1 이 홀수일 때

$$b_n=\begin{cases} -\{2(n+a_1)+2\} & (n\text{이 홀수인 경우 }) \\ (2n+2)+a_1 & (n\text{이 짝수인 경우 }) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -2n-2-2a_1 & (n\text{이 홀수인 경우 }) \\ 2n+2+a_1 & (n\text{이 짝수인 경우 }) \end{cases}$$

에서 $b_1+b_2=(-4-2a_1)+(6+a_1)=2-a_1$ 이다.

(ii) a_1 이 짝수일 때

$$b_n=\begin{cases} -2(n+a_1) & (n\text{이 홀수인 경우 }) \\ (2n+2)+a_1 & (n\text{이 짝수인 경우 }) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -2n-2a_1 & (n\text{이 홀수인 경우 }) \\ 2n+2+a_1 & (n\text{이 짝수인 경우 }) \end{cases}$$

에서 $b_1+b_2=(-2-2a_1)+(6+a_1)=4-a_1$ 이다.

수학 영역(확률과 통계) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ① (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 이항분포의 분산을 구할 수 있는가?

[해설]

이항분포 $\mathrm{B}\left(36,\ \frac{1}{3}\right)$ 을 따르는 확률변수 X 의 분산은

$\mathrm{V}(X)=36\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=8$

24) [정답] ⑤ (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 조건부확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{3}$ 이므로

$3\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$ 이므로

$\mathrm{P}(A)=3\mathrm{P}(A)-3\mathrm{P}(A\cap B)$

$3\mathrm{P}(A\cap B)=2\mathrm{P}(A)$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$

25) [정답] ① (출제자 : 23 정현우)

[출제의도] 정규분포를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$f(0)\times f(2)<0$ 이므로 $f(0)<0$, $f(2)>0$ 이다.

$f(0)\le f(1)\le f(2)$ 이고, $f(2)\le f(3)\le f(4)$ 이므로

$f(0)=-1$, $f(2)=1$ 인 경우 함수의 개수: $3\times{}_4\mathrm{H}_2=3\times{}_5\mathrm{C}_2=30$

$f(0)=-1$, $f(2)=2$ 인 경우 함수의 개수: $4\times{}_3\mathrm{H}_2=4\times{}_4\mathrm{C}_2=24$

$f(0)=-1$, $f(2)=3$ 인 경우 함수의 개수: $5\times{}_2\mathrm{H}_2=5\times{}_3\mathrm{C}_2=15$

$f(0)=-1$, $f(2)=4$ 인 경우 함수의 개수: $6\times{}_1\mathrm{H}_2=6\times{}_2\mathrm{C}_2=6$

총 함수의 개수는 $30+24+15+6=75$ 개이다.

26) [정답] ④ (출제자 : 23 하종수)

[출제의도] 이산확률변수의 분포를 통해 평균을 구할 수 있는가?

[해설]

$1\le 20a+b\le 106$ 이므로 확률변수 X 가 가지는 값은 1, 2, 3 이다.

$X=1$ 일 때, $a=0$ 이므로 확률은 $\frac{2}{7}$ 이다.

$X=3$ 일 때, $a=5$, $b=6$ 이므로 확률은 $\frac{1}{21}$ 이다.

$X=2$ 일 때 확률은 $1-\frac{2}{7}-\frac{1}{21}=\frac{2}{3}$ 이다.

그러므로 $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{7}+2\times\frac{2}{3}+3\times\frac{1}{21}=\frac{37}{21}$ 이다.

27) [정답] ③ (출제자 : 24 오현민)

[출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

점 P 가 원점에서 점 $(19,\ 19)$ 까지 가기 위해서는 x 축의 방향으로 19 만큼 y 축의 방향으로 19 만큼 평행이동해야 한다.

첫 방향 전환 전에 x축의 방향으로 p_1 만큼, 첫 번째와 두 번째 방향 전환 사이 y 축의 방향으로 q_1 만큼 이동한다.
같은 방식으로 p_2, q_2 를 정의한다.

3 번의 방향 전환을 거쳐서 점 $(19,\ 19)$ 에 도착해야 하므로 두 방정식 $p_1+p_2=19$, $q_1+q_2=19$ 가 각각 성립한다.

이때 p_1, p_2, q_1, q_2 는 모두 양의 정수이므로 구하는 경로의 수는

$p_1=p_1{}'+1$, $p_2=p_2{}'+1$, $q_1=q_1{}'+1$, $q_2=q_2{}'+1$

(단, $p_1{}'$, $p_2{}'$, $q_1{}'$, $q_2{}'$ 는 0 이상의 정수이다.)

$p_1{}'+p_2{}'=17$, $q_1{}'+q_2{}'=17$

$({}_2\mathrm{H}_{17})^2=({}_{18}\mathrm{C}_{17})^2=324$

28) [정답] ③ (출제자 : 23 하종수)

[출제의도] 원순열을 구할 수 있는가?

[해설]

어떤 수를 소인수분해하여 $a^p \times b^q \{ \times c^r \}$ (a , b , c 는 서로소인 소수, p , q , r 은 자연수) 이면 양의 약수의 개수는 $(p+1)(q+1)\{(r+1)\}$ 이다.

1 부터 8 까지의 자연수를 1 과 소수의 곱으로 표현하면 다음과 같다.

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	2^2	5	2×3	7	2^3

1 부터 8 까지의 서로 다른 두 자연수의 곱은 최대 3 개의 소수의 곱으로 표현할 수 있으므로 두 수의 곱이 8 개 이상의 약수를 가지는 방법은 3 개의 소수의 곱이거나 소인수분해했을 때 $a^2 \times b^c$ 에서 c 가 2 이상, $a \times b^c$ 에서 c 가 3 이상인 경우이다.

따라서 이웃한 2 장의 카드에 적혀있는 수의 곱이 8 개 이상의 양의 약수를 가지는 경우는 6 과 4 , 5 , 7 , 8 이 이웃한 경우와 8 과 3 , 5 , 7 이 이웃한 경우이다. 따라서 6 은 1 , 2 , 3 중 2 개와 이웃하여야 하고, 8 은 1 , 2 , 4 중 2 개와 이웃하여야 한다.

i) 6 이 1 , 2 와 이웃한 경우
8 이 1 또는 2 와 이웃해야 하며 4 도 이웃하여야 한다. 따라서 $\{(1,6,2),(8,4)\}$, 3 , 5 , 7 을 원순열로 나열한 것과 같고 6 을 기준으로 1 과 2 의 위치와 8 의 위치를 고려하면 가능한 경우의 수는
$2 \times 2 \times 3! = 24$ 가지이다.

ii) 6 이 1 , 3 과 이웃한 경우
8 이 1 과 이웃할 경우 2 또는 4 도 이웃해야 하므로 $(8,1,6,3)$, 2 , 4 , 5 , 7 을 원순열로 나열한 것과 같고 6 을 기준으로 1 과 3 의 위치와 8 옆에 2 와 4 중 나열할 수를 결정하면 가능한 경우의 수는
$2 \times 2 \times 3 \neq 24$ 가지이다.
8 이 2 , 4 와 이웃할 경우 $(1,6,3)$, $(2,8,4)$, 5 , 7 을 원순열로 나열한 것과 같고 6 을 기준으로 1 과 2 의 위치와 8 을 기준으로 4 와 8 의 위치를 고려하면 가능한 경우의 수는 $2 \times 3! \times 2 = 24$ 가지이다.

iii) 6 이 2 , 3 과 이웃한 경우
ii) 의 경우와 같으므로 가능한 경우의 수는 48 가지이다.

그러므로 가능한 경우의 수는 $24+24+24+48=120$ 가지이다.

29) [정답] 16 (출제자 : 23 정현우)

[출제의도] 정규분포를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

모든 실수 t 에 대하여 $f(m) \geq f(t)$ 를 만족시키는 상수 m 이 존재한다는 것은 $f(t)$ 의 최댓값이 $f(m)$ 이라는 뜻이다.

$f(t) = \mathrm{P}(t \leq X \leq t+2) = \mathrm{P}\left(\dfrac{t-12}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{t-10}{\sigma}\right)$ 가 최대가 되기 위해서는 $\dfrac{t-12}{\sigma} = -\dfrac{t-10}{\sigma}$ 이어야 하므로 $t=11$ 이다.

따라서, $m=11$ 이다.

$f(m-1)+f(m+1)$
$= f(10)+f(12) = \mathrm{P}(10 \leq X \leq 12) + \mathrm{P}(12 \leq X \leq 14)$ 이고,
이를 표준화하면
$\mathrm{P}\left(\dfrac{-2}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) + \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{2}{\sigma}\right) = 2\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{2}{\sigma}\right)$ 이다.

$2\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{2}{\sigma}\right) = 2 \times 0.4332 = 2\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5)$ 이므로
$\dfrac{2}{\sigma} = \dfrac{3}{2}$, $\sigma = \dfrac{4}{3}$ 이다.

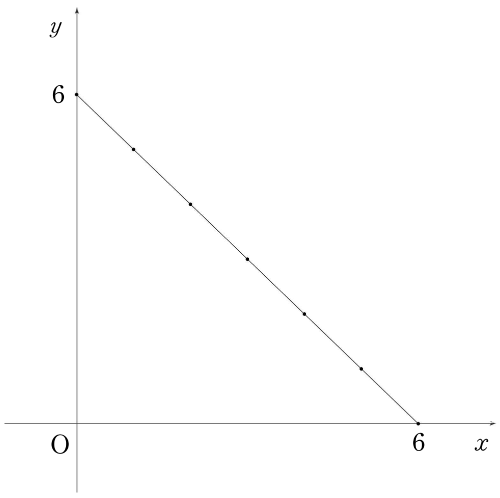
따라서, $12\sigma = 12 \times \dfrac{4}{3} = 16$

30) [정답] 389 (출제자 : 23 하종수)

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 사건의 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

시행을 3 번 반복한 후 동전을 던진 횟수는 6 회이다. 점 A 는 동전을 1 회 던질 때 x 좌표 또는 y 좌표가 1 만큼 커지므로 시행을 3 번 반복한 후 점 A 의 x 좌표와 y 좌표의 합은 6 이다. 점 A 는 양의 방향으로만 이동하므로 시행을 3 번 반복한 후 가능한 점 A 의 위치는 다음 그림과 같이 0 이상 6 이하의 정수 n 에 대하여 $(n, 6-n)$ 인 점 7 가지이다. 이때, n 은 던진 동전 중 앞면이 나온 횟수이다.



점 B 는 동전이 (앞, 앞) , (앞, 뒤) 일 때는 x 축의 양의 방향으로, (뒤, 뒤) 일 때는 y 축의 양의 방향으로 주사위의 눈의 수만큼 평행이동한다. 따라서 점 B 는 1 회의 시행에서 최대 6 만큼 평행이동하므로 3 회의 시행 동안 최대 18 만큼 평행이동할 수 있으며, x 좌표가 1 이상일 때 y 좌표는 12 이하이며, y 좌표가 1 이상일 때 x 좌표는 12 이하이다. 또한, x 좌표가 또는 y 좌표가 7 이상일 때 다른 좌표는 6 이하이다.

i) $n=0$ 또는 $n=6$ 인 경우
$n=0$ 일 때, 점 B 는 y 축으로만 이동하며 주사위의 결과에 상관없이 원점과 두 점 A , B 과 한 직선 위에 있다. 따라서 이 경우의 확률은 동전을 던졌을 때 6 회 뒷면이 나올 확률인 $\dfrac{1}{2^6}$ 이다.
$n=6$ 일 때, 점 B 는 x 축으로만 이동하며 주사위의 결과에 상관없이 원점과 두 점 A , B 과 한 직선 위에 있다. 따라서 이 경우의 확률은 동전을 던졌을 때 6 회 앞면이 나올 확률인 $\dfrac{1}{2^6}$ 이다.

ii) $n=1$ 인 경우

점 B는 x축의 방향으로 1회, y축의 방향으로 2회 이동하므로 시행을 3번 반복한 후 위치할 수 있는 좌표는 x좌표가 6 이하, y좌표가 12 이하이다. 이때, 점 B가 원점과 $(1, 5)$와 한 점에 있다면 점 B의 좌표는 $(1, 5)$ 또는 $(2, 10)$이다. 따라서 이 경우의 확률은 동전을 던졌을 때 1회 앞면, 5회 뒷면이 나올 확률에 동전이 앞면이 나온 시행에서 주사위의 눈이 1이 나오고 1 이상 6 이하의 두 자연수의 합이 5, 또는 동전이 앞면이 나온 시행에서 주사위의 눈이 2가 나오고 1 이상 6 이하의 두 자연수의 합이 10이 되는 경우의 수를 주사위를 3번 굴렸을 때 확률의 합을 곱한 것과 같다. 따라서 $\dfrac{6}{2^6} \times \dfrac{4+3}{6^3} = \dfrac{7}{2^6 \times 6^2}$이다.

iii) $n=2$인 경우

점 B가 x축의 방향으로 1회, y축의 방향으로 2회 이동하면 시행을 3번 반복한 후 위치할 수 있는 좌표는 x좌표가 6 이하, y좌표가 12 이하, x축의 방향으로 2회, y축의 방향으로 1회 이동하면 시행을 3번 반복한 후 위치할 수 있는 좌표는 x좌표가 12 이하, y좌표가 6 이하이다.

점 B가 x축의 방향으로 1회, y축의 방향으로 2회 이동하기 위해서는 한 번의 시행에서 동전이 모두 앞면, 나머지 두 번의 시행에서 동전이 모두 뒷면이 나와야 하며, 이때 점 B가 원점과 $(2, 4)$와 한 점에 있다면 가능한 점 B의 좌표는 $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 8)$, $(5, 10)$, $(6, 12)$이다. 따라서 이 경우의 확률은 동전이 나올 수 있는 결과 2^6가지 중 3가지이며, 주사위가 나올 수 있는 결과 6^3가지 중 각각 1, 3, 5, 5, 3, 1이므로 $\dfrac{3}{2^6} \times \dfrac{1+3+5+5+3+1}{6^3} = \dfrac{9}{2^6 \times 6^2}$이다.

점 B가 x축의 방향으로 2회, y축의 방향으로 1회 이동하기 위해서는 한 시행에서 동전이 모두 뒷면이 나오고 두 시행에서 앞면 1개, 뒷면 1개가 나와야 하며, 이때 점 B가 원점과 $(2, 4)$와 한 점에 있다면 가능한 점 B의 좌표는 $(2, 4)$, $(3, 6)$이다. 따라서 이 경우의 확률은 동전이 나올 수 있는 결과 2^6가지 중 12가지이며, 주사위가 나올 수 있는 결과 6^3가지 중 각각 1, 2이므로 $\dfrac{12}{2^6} \times \dfrac{1+2}{6^3} = \dfrac{6}{2^6 \times 6^2}$이다.

iv) $n=3$인 경우

점 B가 x축의 방향으로 2회, y축의 방향으로 1회 이동하면 시행을 3번 반복한 후 위치할 수 있는 좌표는 x좌표가 12 이하, y좌표가 6 이하이다.

점 B가 x축의 방향으로 2회, y축의 방향으로 1회 이동하기 위해서는 동전 두 개 모두 앞면이 나오는 시행과 동전 두 개 모두 뒷면이 나오는 시행과 앞면 1개, 뒷면 1개가 나오는 시행이 1회씩 나와야 하므로, 이때 점 B가 원점과 $(3, 3)$와 한 점에 있다면 가능한 점 B의 좌표는 $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$이다. 따라서 이 경우의 확률은 동전이 나올 수 있는 결과 2^6가지 중 12가지이며, 주사위가 나올 수 있는 결과 6^3가지 중 각각 1, 2, 3, 4, 5이므로

$\dfrac{12}{2^6} \times \dfrac{1+2+3+4+5}{6^3} = \dfrac{30}{2^6 \times 6^2}$이다.

v) $n=4$인 경우

점 B가 x축의 방향으로 2회, y축의 방향으로 1회 이동하면 시행을 3번 반복한 후 위치할 수 있는 좌표는 x좌표가 12 이하, y좌표가 6 이하이다. 이것은 $n=2$일 때 점 B가 x축의 방향으로 1회, y축의 방향으로 2회 이동할 때의 확률과 동일하다. 따라서 이 경우의 확률은 $\dfrac{9}{2^6 \times 6^2}$이다.

vi) $n=5$인 경우

점 B는 x축 위에서만 움직이므로 원점과 두 점 A, B과 한 직선 위에 존재하지 않는다.

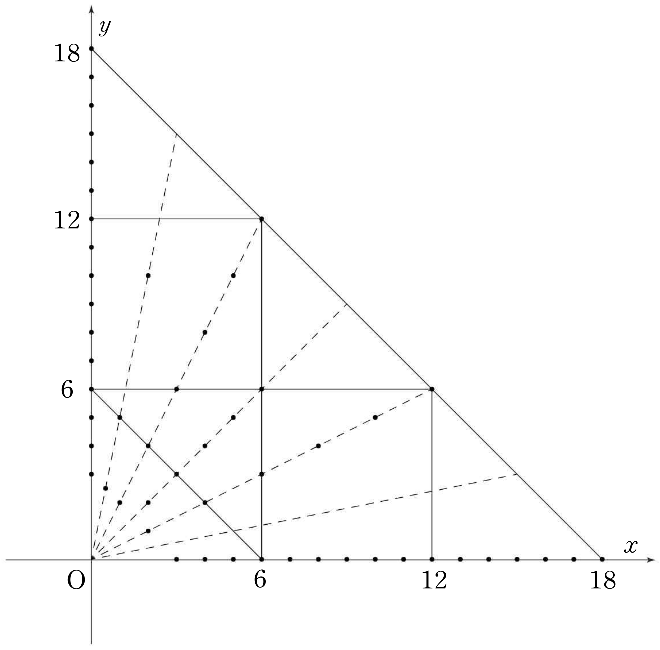
그러므로 원점과 두 점 A, B과 한 직선 위에 있을 확률은

$\dfrac{1+1}{2^6} + \dfrac{7+9+6+30+9}{2^6 \times 6^2} = \dfrac{133}{2304}$이고, $p=2304$, $q=133$으로

$\dfrac{p}{9}+q=389$이다.

[별해]

가능한 점 B는 다음과 같다.



두 주사위의 합이 2 이상 12 이하의 자연수 n인 경우의 수는 $6-|n-7|$가지이다.

점 B가 x축의 방향으로 2회, y축의 방향으로 1회 이동하면 동전이 (뒤, 뒤)가 나온 시행에서는 반드시 주사위가 점의 y좌표와 같은 값이 나와야 하므로 조건을 만족하는 경우의 수는 1이고, x축의 방향으로 이동하는 시행에서의 두 주사위 눈의 합이 x좌표가 같은 경우의 수이다. x축의 방향으로 1회, y축의 방향으로 2회 이동할 때도 동일한 방식으로 x축의 방향으로 이동하는 조건을 만족하는 경우의 수는 1이고 y축의 방향으로 이동하는 시행에서의 두 주사위 눈의 합이 y좌표가 같은 경우의 수이다.

2025학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역(미적분) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ③ (출제자 : 23 정원준)

[출제의도] 초월함수의 극한을 계산할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x^2+3x+1)}{\sin 4x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(2x^2+3x+1)}{2x^2+3x}}{\frac{\sin 4x}{4x}}\times\frac{2x^2+3x}{4x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3x}{4x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+3}{4}$$

$$=\frac{3}{4}$$

24) [정답] ② (출제자 : 23 강주연)

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$x=e^{2t}-t^2$ 에서 $\frac{dx}{dt}=2e^{2t}-2t$

$y=\sin(2\pi t)$ 에서 $\frac{dy}{dt}=2\pi\cos(2\pi t)$

그러므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\pi\cos(2\pi t)}{2e^{2t}-2t}=\frac{\pi\cos(2\pi t)}{e^{2t}-t}$$

따라서 $t=0$ 일 때의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{\pi\cos(0)}{e^0}=\pi$$

25) [정답] ② (출제자 : 24 장경정)

[출제의도] 수열의 일반항을 구하고, 그 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

중심이 원점이고 반지름이 n 인 원은 $x^2+y^2=n^2$ 이다. 원과 곡선 $y=x^2\ (x>0)$ 이 만나는 점이 점 P 이다.

$x^2+y^2=n^2$ 에 $x^2=y$ 를 대입하면

$y+y^2=n^2$, $y^2+y-n^2=0$.

이는 y 에 대한 이차방정식이므로 근의 공식을 이용하면

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+4n^2}}{2}.$$

이 때 $y>0$ 이므로 $y=\frac{-1+\sqrt{1+4n^2}}{2}$

점 P 의 y 좌표가 $\frac{-1\pm\sqrt{1+4n^2}}{2}$ 이므로

$L_n=\frac{-1+\sqrt{1+4n^2}}{2}$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_{4n}}{L_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{1+64n^2}-1}{2}}{\frac{\sqrt{1+4n^2}-1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+64n^2}-1}{\sqrt{1+4n^2}-1}$$

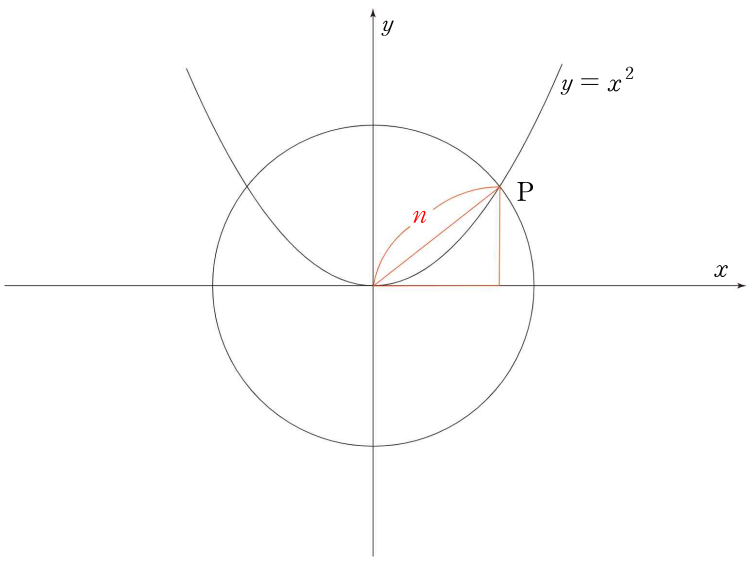
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+64}-\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+4}-\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}}=4$$

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{L_{4n}}{L_n}=4$

[별해]

그래프를 이용해서도 L_n 을 구할 수 있다.

중심이 원점이고 반지름이 n 인 원과 곡선 $y=x^2\ (x>0)$ 을 그리면 아래와 같다.



점 P 의 x 좌표를 t 라 하면 y 좌표는 t^2 이다. 원점, (t,t^2), $(t,0)$ 이 직각삼각형을 이루므로 $t^2+t^4=n^2$.

t^2 을 s 으로 치환하면 $s+s^2=n^2$, $s^2+s-n^2=0$

이는 s 에 대한 이차방정식이므로 근의 공식을 이용하면

$s=\frac{-1\pm\sqrt{1+4n^2}}{2}$. 이 때 $s>0$ 이므로 $s=\frac{-1+\sqrt{1+4n^2}}{2}$

$s=t^2$ 이고 점 P 의 y 좌표도 t^2 이므로

$L_n=\frac{-1+\sqrt{1+4n^2}}{2}$ 이다.

26) [정답] ④ (출제자 : 24 김시현)

[출제 의도] 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

[해설]

직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라고 하면 $S(t)=e^t\sin t$ 이다.

따라서 입체도형의 부피를 V라 하면

$V=\int_0^{\frac{\pi}{3}}e^t\sin t\,dt$

$u(t)=\sin t$, $v'(t)=e^t$

$u'(t)=\cos t$, $v(t)=e^t$ 라 하자.

$V=\int_0^{\frac{\pi}{3}}e^t\sin t\,dt$

$=[e^t\sin t]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}e^t\cos t\,dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}e^t\cos t\,dt$를 P라 할 때

$P=\int_0^{\frac{\pi}{3}}e^t\cos t\,dt$

$u(t)=\cos t$, $v'(t)=e^t$

$u'(t)=-\sin t$, $v(t)=e^t$ 라 하자.

$P=\int_0^{\frac{\pi}{3}}e^t\cos t\,dt$

$=[e^t\cos t]_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}e^t\sin t\,dt$

$V=\int_0^{\frac{\pi}{3}}e^t\sin t\,dt$

$=[e^t\sin t]_0^{\frac{\pi}{3}}-[e^t\cos t]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}e^t\sin t\,dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}e^t\sin t\,dt=V$이니

$2V=[e^t\sin t-e^t\cos t]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)e^{\frac{\pi}{3}}+1$

$V=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)e^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2}$

27) [정답] ① (출제자 : 23 채상진)

[출제의도] 도함수를 이용하여 역함수 적분을 할 수 있는가?

[해설]

$f(x)=\int_2^x\left(e^{t^2}+e^{-t^2}\right)dt$에서 $f(2)=0$, $f'(x)=e^{x^2}+e^{-x^2}$을 알 수 있다.

$\int_0^{\frac{f(-2)}{4}}g(2x)\,dx$ 에서

$2x=t$라 하면

$\int_0^{\frac{f(-2)}{4}}g(2x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{f(-2)}{2}}g(t)\,dt$ 이다.

$f'(x)$는 y축 대칭 함수이므로 함수 $f(x)$는 $(0, f(0))$ 점대칭이다.

따라서 $\frac{f(2)+f(-2)}{2}=f(0)$이다.

$f(x)$가 일대일대응이므로 $\frac{f(-2)}{2}=f(k)$를 만족시키는 k는 0뿐이다.

$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{f(-2)}{2}}g(t)\,dt$

$t=f(k)$라 하면

$dt=f'(k)\,dk$

$=\frac{1}{2}\int_2^0 kf'(k)\,dk$

$=\frac{1}{2}\int_2^0\left(xe^{x^2}+xe^{-x^2}\right)dx$

$=\frac{1}{4}\left[e^{x^2}-e^{-x^2}\right]_2^0$

$=-\frac{1}{4}\left(e^4-e^{-4}\right)$

28) [정답] ② (출제자 : 24 장경정)

[출제의도] 합성함수와 삼각함수의 미분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고

$f'(-k)=f'(k)=0$이므로

$f'(x)=3(x-k)(x+k)=3(x^2-k^2)$이다.

함수 $y=g(x)$ 위의 x좌표가 a, b, c, d 인 점을 각각 A, B, C, D라 하자.

$g(x)=f(k\sin x)$이고 $k\sin x$는 주기가 2π인 함수이므로 $g(x)$의 주기도 2π이다. 따라서 (가) 조건에 의해 점 A 위에서의 접선과 점 D 위에서의 접선의 기울기가 같다. 즉, 두 접선은 서로 평행하다. 그러므로 네 점 A, B, C, D 위에서의 접선으로 둘러싸인 부분이 직사각형이기 위해서는 점 B 위에서의 접선의 기울기와 점 C 위에서의 접선이 기울기가 같고, 점 B 위에서의 접선의 기울기가 점 A 위에서의 접선과 수직이어야 한다.

$d=a+2\pi$이고 $a<b<c<d$ 이므로 $c-b<2\pi$여야 한다.

점 B 위에서의 접선의 기울기와 점 C 위에서의 접선이 기울기가 같아야 하므로, $g'(b)=g'(c)$이다. $g'(x)=f'(k\sin x)k\cos x$이므로

$g'(b)=g'(c)$

$f'(k\sin b)k\cos b=f'(k\sin c)k\cos c$

$3\left(k^2\sin^2 b-k^2\right)k\cos b=3\left(k^2\sin^2 c-k^2\right)k\cos c$

$3k^2\left(\sin^2 b-1\right)k\cos b=3k^2\left(\sin^2 c-1\right)k\cos c$

$3k^3\left(-\cos^3 b\right)=3k^3\left(-\cos^3 c\right)$

$\cos b=\cos c$

이다.

$\cos b = \cos c$ 를 만족시키려면
$c - b = 2n\pi$ 이거나 $b + c = 2n\pi$ (n 은 정수)이어야 한다.
그러나 $a < b < c < d$ 이고 $d - a = 2\pi$ 이므로 $c - b < 2\pi$ 이다.
따라서 $b + c = 2n\pi$ 이다.

또한 점 A 위에서의 접선과 B 위에서의 접선이 수직이어야 하므로 두 접선의 기울기의 곱이 -1 이어야 한다.
즉 $g'(a)g'(b) = -1$
$g'(a)g'(b) = f'(k\sin a)k\cos a \times f'(k\sin b)k\cos b$
$= (3k^2\sin^2 a - 3k^2)k\cos a \times (3k^2\sin^2 b - 3k^2)k\cos b$
$= 3k^3(\sin^2 a - 1)\cos a \times (3k^2\sin^2 b - 3k^2)k\cos b$
$= 3k^3(-\cos^3 a) \times 3k^3(-\cos^3 b)$
$= 9k^6\cos^3 a\cos^3 b$

따라서 $9k^6\cos^3 a\cos^3 b = -1$
$(\cos a\cos b)^3 = -\dfrac{1}{9k^6}$
$\cos a\cos b = -\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{k^2}$

$b + c = 2n\pi$, $d = a + 2\pi$ 이므로
$\cos(c+d) = \cos(2n\pi - b + a + 2\pi) = \cos(a-b)$ 이다.

따라서 (나) 조건에 의하여
$\cos(a+b) + \cos(c+d) = \cos(a+b) + \cos(a-b) = -\left(\dfrac{1}{72}\right)^{\frac{1}{3}}$
삼각함수의 덧셈정리를 이용하면,
$\cos(a+b) + \cos(a-b)$
$= \cos a\cos b - \sin a\sin b + \cos a\cos b + \sin a\sin b$
$= 2\cos a\cos b$
$= -\left(\dfrac{1}{72}\right)^{\frac{1}{3}}$
즉 $\cos a\cos b = -\left(\dfrac{1}{72}\right)^{\frac{1}{3}} \times \dfrac{1}{2}$

위에서 $\cos a\cos b = -\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{k^2}$ 를 구하였으므로,
$-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{72}\right)^{\frac{1}{3}} = -\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{k^2}$

$k = 2$

29) [정답] 11 (출제자 : 23 한동화)
[출제의도] 조건을 만족시키는 급수의 합을 구할 수 있는가?

[해설]
등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로,
$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n-1}| + \sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|$ 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n-1}| + \sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}| = \sum_{n=1}^{\infty}4a_{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|$
그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n-1}| = 4 \times \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+1}$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r (r 은 실수)라 하자.
$|a_{2n-1}| = |a_1 r^{2n-2}| = |a_1|\left|(r^2)^{n-1}\right| = |a_1|(r^2)^{n-1}$ 이므로
수열 $\{|a_{2n-1}|\}$ 은 첫 번째 항이 $|a_1|$, 공비가 r^2 인 등비수열이다.

그러므로 $\dfrac{|a_1|}{1-r^2} = \dfrac{4a_1r^2}{1-r^2}$, $|a_1| = 4a_1r^2$
$a_1 < 0$ 이면, $-1 = 4r^2$ 이므로 모순이다.
따라서 $a_1 > 0$, $r^2 = \dfrac{1}{4}$ 이다.

마찬가지로, 수열 $\{|a_{2n}|\}$ 은 첫째항이 $|a_2|$, 공비가 r^2 인 등비수열이므로
$\dfrac{|a_1 r|}{1-r^2} = \dfrac{3a_1r^2}{1-r^3}$
$\dfrac{4|r|}{3} = \dfrac{\frac{3}{4}}{1-\frac{r}{4}}$
$r = \dfrac{1}{2}$ 이면, 성립하지 않으므로 모순이다.
그러므로 $r = -\dfrac{1}{2}$

$S = r^3 + \dfrac{r}{1-r} = -\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{11}{24}$ 이므로,
$24|S| = 11$

30) [정답] 482 (출제자 : 24 김시현)

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 그래프를 그리고 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 이므로 $f(0)=0$ 이다.

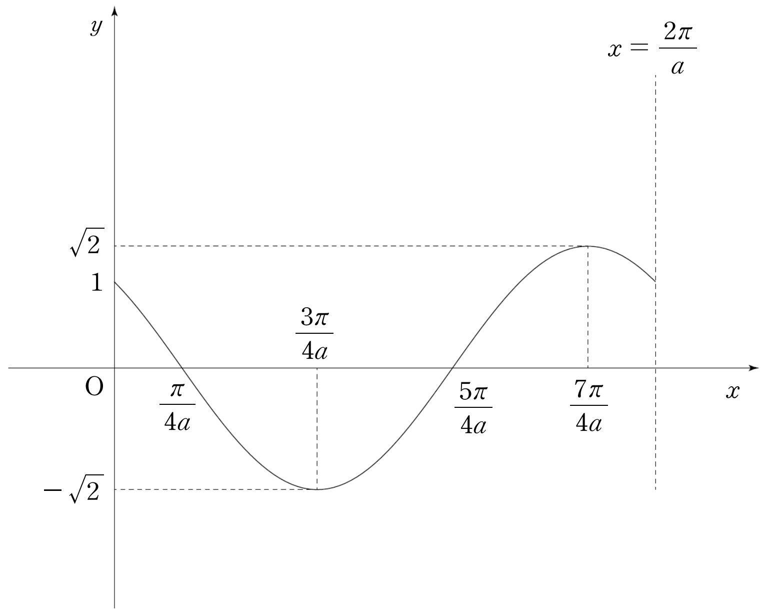
$0<x\le\frac{2\pi}{a}$ 에서 $g(x)=\cos ax-\sin ax$ 이므로

$g'(x)=-a(\sin ax+\cos ax)$ 이다.

따라서 $x=\frac{3\pi}{4a}$ 에서 극소, $x=\frac{7\pi}{4a}$ 에서 극대임을 알 수 있다.

$g\left(\frac{3\pi}{4a}\right)=-\sqrt{2}$, $g\left(\frac{7\pi}{4a}\right)=\sqrt{2}$ 이므로

$0<x\le\frac{2\pi}{a}$ 에서 $g(x)$ 의 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.



$0<x\le\frac{2\pi}{a}$ 에서 방정식 $g(x)=1$ 의 서로 다른 실근이 2개 존재하므로

(가) 조건에 의해 $x\le 0$ 에서 방정식 $g(x)=1$ 의 서로 다른 실근이 3 개 존재해야 한다.

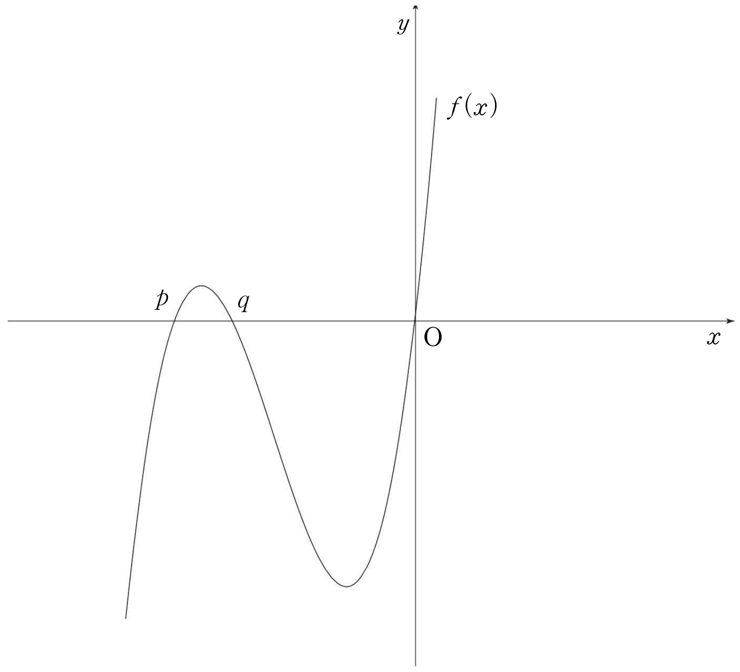
$x\le 0$ 에서 $g(x)=1-|f(x)|$ 이므로 방정식 $g(x)=1$ 의 서로 다른 실근은 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근과 같다.

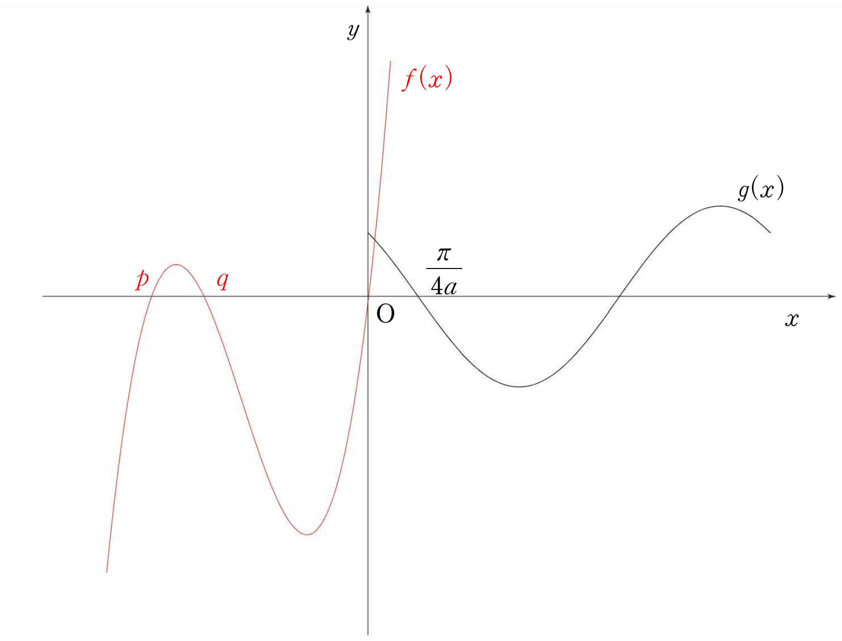
그러므로 $x\le 0$ 에서 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근은 3개 존재하고, 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 이므로 방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근도 2개 존재한다.

$x>0$ 에서 $f'(x)>0$ 이고, $f(0)=0$ 이므로 $x>0$ 에서 $f(x)>0$ 이다.

$x\le 0$ 에서 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근은 3개 존재하므로 0 이 아닌 서로 다른 실근 2 개를 p , q $(p<q)$ 라고 할 때,

$x\le 0$ 에서의 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$f(0)=0$, $g(0)=1$ 이므로 $f(0)-g(0)=-1$,

$f\left(\frac{\pi}{4a}\right)>0$, $g\left(\frac{\pi}{4a}\right)=0$ 이므로 $f\left(\frac{\pi}{4a}\right)-g\left(\frac{\pi}{4a}\right)>0$,

사잇값 정리에 의하면 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근이 $0<x\le\frac{\pi}{4a}$ 에서 존재한다.

만약 $0<k_1\le\frac{\pi}{4a}$ 인 경우, $0<x<k_1$ 에서 $f(x)<g(x)$ 이므로

$\int_0^{k_1}f(t)\,dt<\int_0^{k_1}g(t)\,dt<\int_0^{\frac{\pi}{4a}}g(t)\,dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{4a}}g(t)\,dt=\frac{\sqrt{2}-1}{a}$

이므로 $\int_0^{k_1}f(t)\,dt<\frac{\sqrt{2}-1}{a}$ 인데, $\int_0^{k_1}f(t)\,dt=\frac{23}{4}$ 이고

2 이상의 양수 a 에 대해 $\frac{23}{4}>\frac{\sqrt{2}-1}{a}$ 이므로 모순이다.

따라서 $0<k_2\le\frac{\pi}{4a}$ 이고, $k_1<0$ 이므로 (나) 조건에 의해 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근이 $x<0$ 에서 k_1 뿐이어야 한다.

$x<0$ 에서 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근은

방정식 $1-|f(x)|=f(x)$ 의 서로 다른 실근과 같고,

방정식 $1=|f(x)|+f(x)$ 의 서로 다른 실근과 같다.

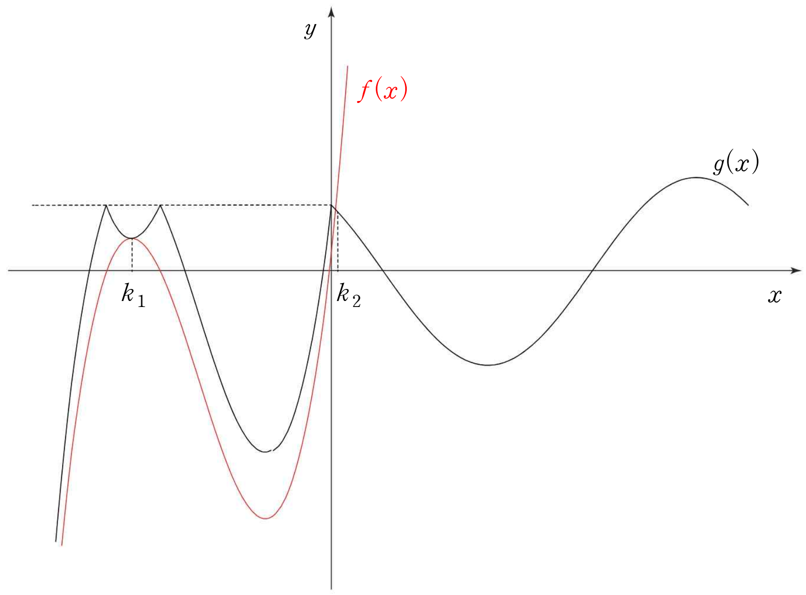
$f(x) \le 0$ 인 경우 $|f(x)|+f(x)=0$, $1 \ne 0$ 이므로 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근이 존재하지 않는다.

$f(x) \ge 0$ 인 경우 $|f(x)|+f(x)=2f(x)$ 이므로 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근은 방정식 $f(x)=\frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근과 같다.

(나) 조건에 의해서 $x<0$ 에서 방정식 $f(x)=\frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근이 k_1 뿐이어야 하므로 $f(x)$ 는 $x=k_1$ 에서 극댓값을 가지고,

$f(k_1)=\frac{1}{2}$ 임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(k_1)=\frac{1}{2}$, $f'(k_1)=0$, $f(0)=0$ 이므로

$f(x)=(x-k_1)^2\left(x-\frac{1}{2(k_1)^2}\right)+\frac{1}{2}$ 이고,

$\int_0^{k_1} f(t)\,dt=\frac{(k_1)^4+4k_1}{12}$, $(k_1)^4+4k_1=69$ 이므로

$k_1=-3$, $f(x)=(x+3)^2\left(x-\frac{1}{18}\right)+\frac{1}{2}$ 임을 알 수 있다.

$f(-1)=4\times\left(-\frac{19}{18}\right)+\frac{1}{2}=-\frac{67}{18}$ 이고, $g\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\sqrt{2}$ 이어야 한다.

$g(x)$ 는 $x=\frac{3\pi}{4a}$ 에서 극소이고, $g\left(\frac{3\pi}{4a}\right)=-\sqrt{2}$ 인데,

$x>0$ 인 x 에 대해 $g\left(\frac{2\pi}{a}+x\right)=g(x)$ 이므로

$g\left(\frac{3\pi}{4a}\right)=-\sqrt{2}$, $g\left(\frac{11\pi}{4a}\right)=-\sqrt{2}$, $g\left(\frac{19\pi}{4a}\right)=-\sqrt{2}\cdots$

음수가 아닌 정수 t 에 대해서 $g\left(\frac{(3+8t)\pi}{4a}\right)=-\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

따라서 $\frac{(3+8t)\pi}{4a}=\frac{\pi}{8}$ 이고, $a=6+16t$ 이다.

$a \ge 2$ 이므로 a 가 작을수록 $f(a)$ 의 값도 작다.

따라서 $t=0$, $a=6$ 일 때 $f(6)=482$