랑데뷰 TacTic

기울기차&차함수

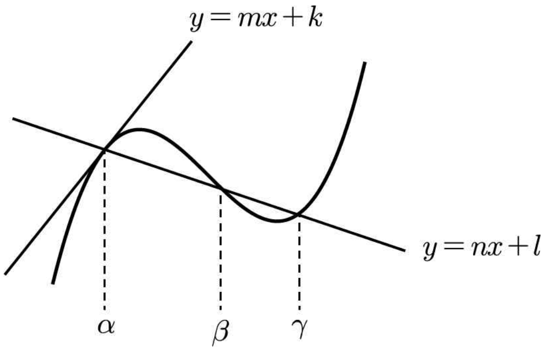
Tactic 01-기울기차 개념

Question

그림과 같이 최고차항의 계수가 a인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$에 접하는 접선의 기울기가 m이고 기울기가 n인 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x좌표가 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$일 때,

$$m-n=|a|(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\ [\text{거리곱}]$$

이다.



문제에 적용시키기 위한 조건은 다음과 같다.

① 곡선 위의 한 점에서 접선의 기울기를 안다.

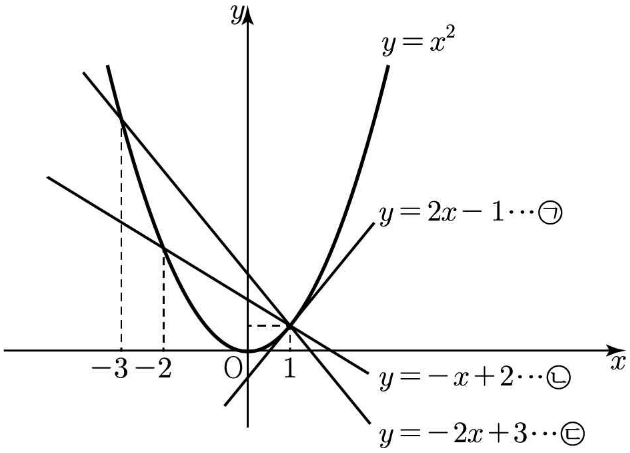
② 접점을 지나고 곡선과 만나는 다른 한 직선의 기울기와 접점이 아닌 다른 교점의 x좌표를 안다.

③ 곡선이 n차의 다항함수일 때, ②의 직선과 곡선이 만나는 점의 개수는 $(n-1)$이상이다. [거리곱 적용가능]

Tac

(1)

그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 세 직선 $y=2x-1$, $y=-x+2$, $y=-2x+3$의 관계에서 파악해 보자.



㉠은 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선이다.

① ㉠, ㉡에서

기울기차$=2-(-1)=3$

거리곱$=1-(-2)=3$

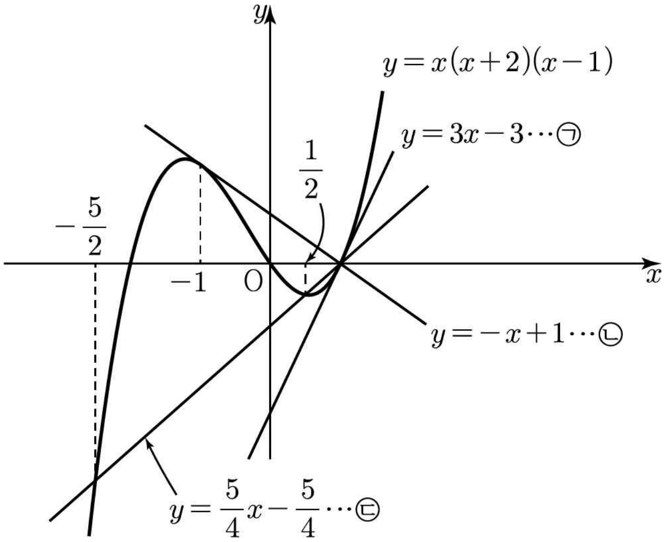
② ㉠, ㉢에서

기울기차$=2-(-2)=4$

거리곱$=1-(-3)=4$

(2)

그림과 같이 곡선 $y=x(x+2)(x-1)$과 세 직선 $y=3x-3$, $y=-x+1$, $y=3x-3$의 관계에서 파악해 보자.



㉠은 곡선 $y=x(x+2)(x-1)$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선이다.

① ㉠, ㉡에서

기울기차$=3-(-1)=4$

거리곱$=(1-(-1))^2=4$

② ㉠, ㉢에서

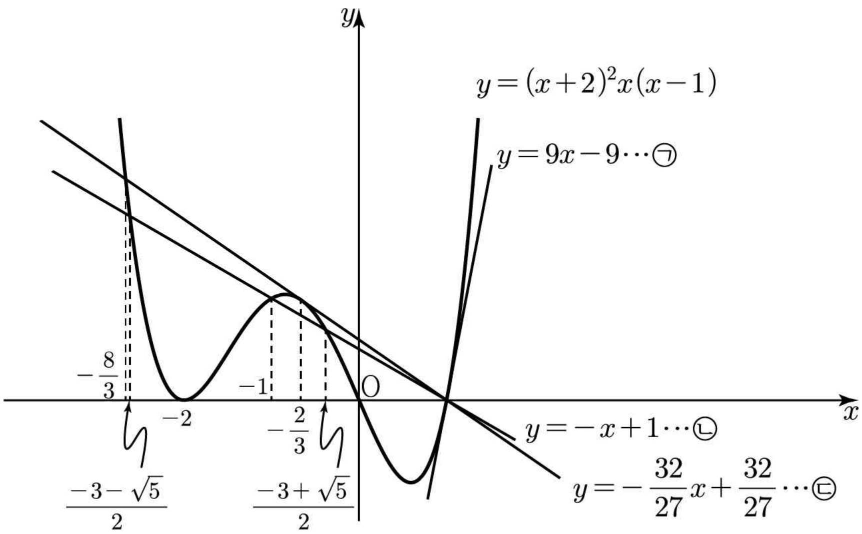
기울기차$=3-\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$

거리곱$=\left(1-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{7}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$

Tac

(3)

그림과 같이 곡선 $y=x(x+2)^2(x-1)$과 세 직선 $y=9x-9$, $y=-x+1$, $y=-\frac{32}{27}x+\frac{32}{27}$의 관계에서 파악해 보자.



㉠은 곡선 $y=x(x+2)^2(x-1)$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선이다.

① ㉠, ㉡에서

기울기차$=9-(-1)=10$

거리곱$=\left(1-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)(1-(-1))\left(1-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$

$=\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\times 2\times\frac{5-\sqrt{5}}{2}$

$=2\times\frac{25-5}{4}=10$

② ㉠, ㉢에서

기울기차$=9-\left(-\frac{32}{27}\right)=\frac{275}{27}$

거리곱$=\left(1-\left(-\frac{8}{3}\right)\right)\times\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2=\frac{11}{3}\times\frac{25}{9}=\frac{275}{27}$

Tactic 02–기울기차 단계별 적용

Question

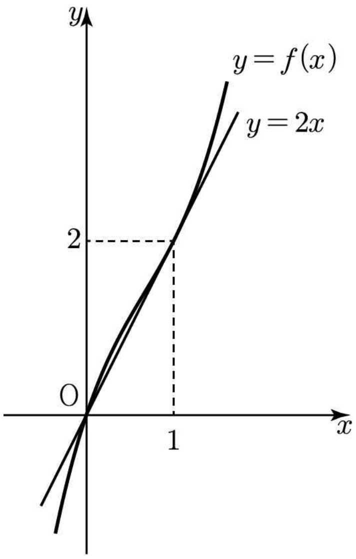
1) step1 [차함수 설정]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(1)=f'(1)=2$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

풀이

곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=2x$에 접하고 접점 $(1,\ 2)$외에 $(0,\ 0)$에서 만나므로 차함수 설정으로 바로 함수 $f(x)$를 구할 수 있다.

$f(x)=x(x-1)^2+2x \ \rightarrow \ f(2)=6$



Tac

[2] step2 [접점을 지나는 직선 설정] → 기울기차로 풀어보세요!

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=1$, $f(1)=f'(1)=2$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

풀이

$x=1$에서 접선의 기울기 2

$(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$를 지나는 직선 $y=x+1$의 기울기 1

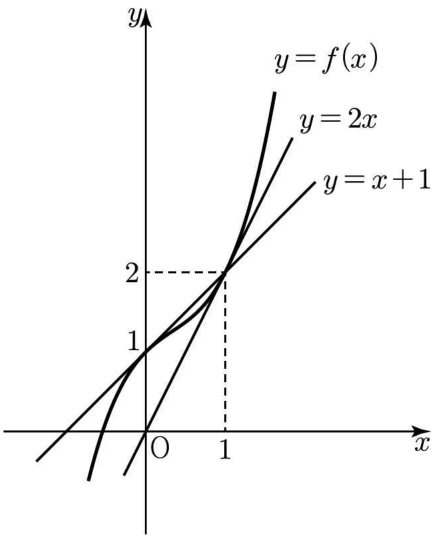
직선 $y=x+1$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 x좌표가 0이 아닌 점(0이 될 수도 있다.)의 x좌표를 k라 하면

기울기차$=2-1=1$

거리곱$=1\times(1-k)$

$\therefore\ k=0$

이다.



따라서 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 방정식이 $y=x+1$이다.

차함수 설정으로

$f(x)=x^2(x-1)+x+1\ \rightarrow\ f(2)=7$

Question

3) step3 → 기울기차로 풀어보세요!

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=1$, $f(1)=-2$, $f'(0)=3$을 만족시킬 때, $f(7)$의 값을 구하시오.

풀이

Tac

[4] step4 → 기울기차로 풀어보세요!

함수 $f(x)=x(x-2)(x-3)$의 그래프 위의 $(3,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점이 $(a,\ f(a))$이다. $(a,\ f(a))$에서의 접선과 $(3,\ 0)$에서의 접선의 기울기 곱이 -3일 때, a의 값을 구하시오.

풀이

Question

5) step5 → 기울기차로 풀어보세요!

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-mx=0$은 서로 다른 세 실근 0, 1, 2을 갖는다.
(나) 방정식 $f(x)-nx=0$은 서로 다른 두 실근 0, $\frac{3}{2}$(중근) 을 갖는다.

$m-n$의 값은? (단, m과 n은 상수이고 $m>n$이다.)

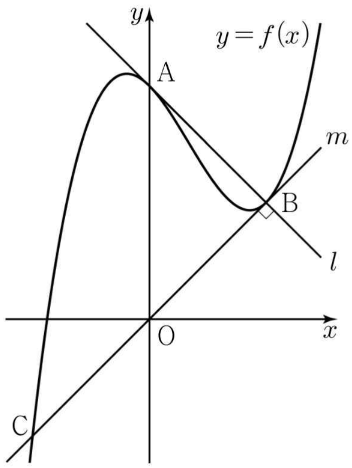
① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

풀이

Tac

[6] 2016학년도 사관B형 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 A가 아닌 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선을 m이라 할 때, 직선 m이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 C라 하자. 두 직선 l, m이 서로 수직이고 직선 m의 방정식이 $y=x$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기는? (단, $f(0)>0$이다.)



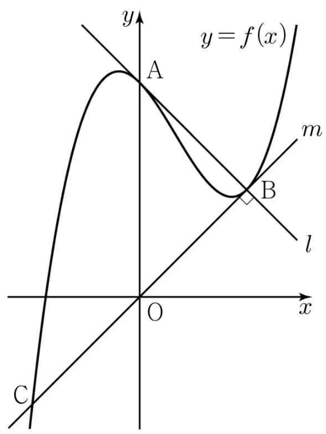
① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

풀이

Question

7) 2016학년도 사관B형 21번-re

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 A가 아닌 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선을 m이라 할 때, 직선 m이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 C라 하자. 두 직선 l, m이 서로 수직이고 직선 m의 방정식이 $y=ax$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기의 최솟값은? (단, $f(0)>0$이다.)



① $\sqrt{78}$ ② $\sqrt{79}$ ③ $4\sqrt{5}$ ④ 9 ⑤ $\sqrt{82}$

풀이

Tac

8) 250611

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

풀이

Question

9) 랑데뷰

최고차항의 계수가 -1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-2}{x-a} = -\frac{1}{2}$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 x절편이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

풀이

10) 랑데뷰

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 상수 k에 대하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(4)}{\int_1^x f(t)dt}=k\ \ (k\neq 0)$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(4,\ f(4))$에서의 접선의 y절편이 0일 때, $f(4k)$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

풀이

Question

11) 200930(나)

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 점 $(k,\ 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

풀이

Tac

12) 200930(나)−re

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(-2,\ f(-2))$에서의 접선과 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선이 점 $\left(\frac{k}{2},\ 0\right)$에서 만난다. $f(2k)=6$일 때, $f(-k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

풀이

Question

13) 241120

$a > \sqrt{2}$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x$$

라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오.

풀이

Tac

14) 241112

함수 $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 t $(0<t<6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은?

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

풀이

Question

15) 241112-re

함수 $f(x)=\frac{1}{12}x^2\left(x-\frac{9}{2}\right)$와 실수 t $\left(0<t<\frac{9}{2}\right)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ x+f(t)-t & (x \geq t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이가 최대일 때 t의 값은? [4점]

① $\frac{31}{9}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ $\frac{34}{9}$ ④ $\frac{35}{9}$ ⑤ 4

풀이

Tac

16) 220622

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

풀이

Question

17) 220622-re

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (나) 방정식 $f(x+f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=-1$일 때, $f(6)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

풀이

Tac

18) 201130(나)

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

풀이

Question

19) 201130(나)-re

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-2x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(2)=2$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오.

풀이

Tac

[20] 2020년 3월 교육청 가형 17번

$0<a<6$ 인 실수 a 에 대하여 원점에서 곡선 $y=x(x-a)(x-6)$ 에 그은 두 접선의 기울기의 곱의 최솟값은?

① -54 ② -51 ③ -48 ④ -45 ⑤ -42

풀이

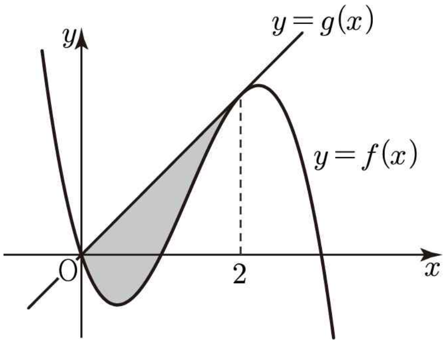
Tactic 04-차함수

Question

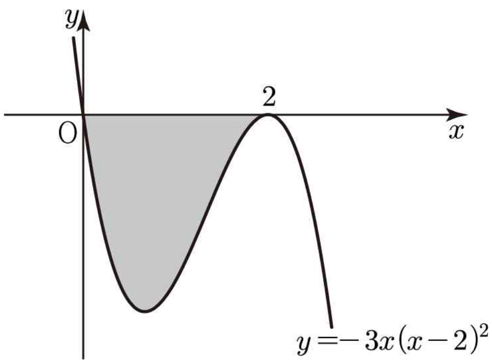
21) 2021년 3월 교육청 9번

최고차항의 계수가 -3 인 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선 $y=g(x)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 원점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{7}{2}$　② $\frac{15}{4}$　③ 4　④ $\frac{17}{4}$　⑤ $\frac{9}{2}$



다음과 같다.



따라서 $\frac{3\times2^4}{12}=4$이다.

Tac

22) 180630(나)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다. (나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점]

풀이

Question

23) 180630(나)−re

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 4인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-8$인 실수 α가 존재한다.
> (나) $f(\beta+1)=g(\beta+1)$이고 $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$f(\beta+2)-g(\beta+2)$의 값을 구하시오. [4점]

풀이

Tac

24) 231122

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.

(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.

(다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

풀이

Question

25) 2023년 3월 교육청 14번

세 양수 a, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<k) \\ -x^2+4bx-3b^2 & (x \geq k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a=1$이면 $f'(k)=1$이다.

ㄴ. $k=3$이면 $a=-6+4\sqrt{3}$이다.

ㄷ. $f(k)=f'(k)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

빠른답

1) 정답 6

2) 정답 7

3) 정답 22

4) 정답 1

5) 정답 ③

6) 정답 ②

7) 정답 ③

8) 정답 ⑤

9) 정답 ③

10) 정답 ②

11) 정답 42

12) 정답 6

13) 정답 25

14) 정답 ③

15) 정답 ⑤

16) 정답 61

17) 정답 25

18) 정답 51

19) 정답 156

20) 정답 ③

21) 정답 ③

22) 정답 243

23) 정답 125

24) 정답 13

25) 정답 ⑤