2025 수능대비
필요충분 모의고사 시즌3
문항분석지 + 1회차 문제지 + 정답과 해설

양지용
수학연구실

필요충분 모의고사 시즌3

◻ 총평

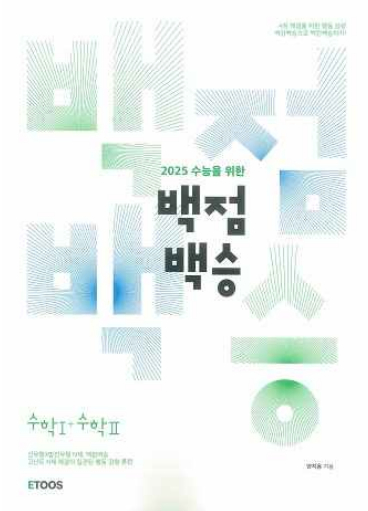
안녕하세요. 수학강사 양지용입니다. 필요충분 모의고사 시즌3를 여러분들에게 소개할 수 있어서 기쁩니다. 지금까지 출제된 평가원(최근 위주)의 출제 기조와 2025 EBS 수특, 수완의 아이디어를 반영하여 제작하였습니다. 과하게 어려운 문항은 없지만, 참신한 표현들을 차용하여 낯선 상황들을 제공하려 하였습니다. 시즌4에는 9월 모의평가까지 반영되어서 더 우수한 문항들로 여러분들을 만날 계획입니다. 반드시 함께 제공되는 해설영상과 함께 공부하길 바라며, 선택과목 모의고사 3회를 추가 제작하였습니다. 이는 백점백승 해당과목 강좌 내에 추가로 업로드될 예정이니, 꼭 모두 다운로드하여 풀어보세요. 백점백승 N제에 혼신의 힘을 다하고 있습니다. 여러분들도 백점백승과 함께, 양지용쌤과 함께 수능에서 반드시 승리합시다.

◻ 1회차 예상 등급컷

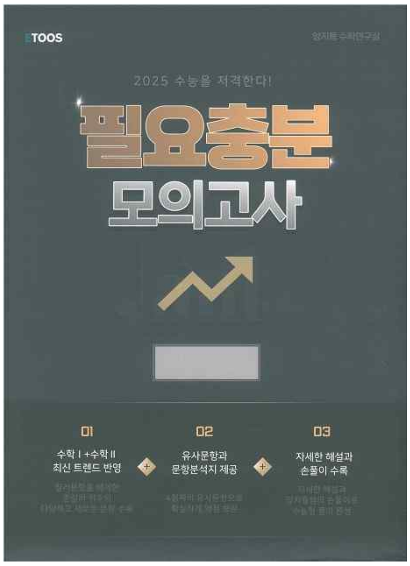
	확률과 통계	미적분
1등급	92점~100점	88점~100점
2등급	83점~91점	80점~87점
3등급	73점~82점	69점~79점
4등급	65점~72점	58점~68점
5등급	51점~64점	48점~57점

◻ 양지용T 커리큘럼

- For 1등급, 만점 목표 학생

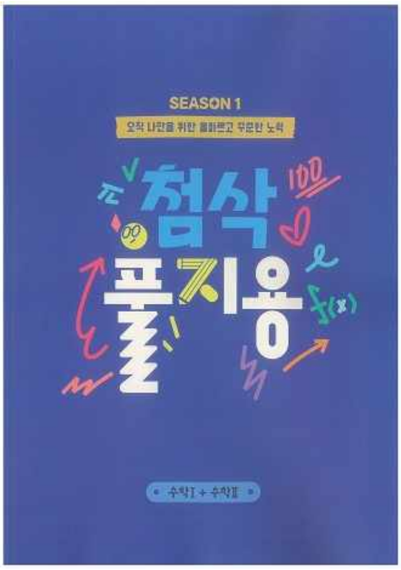


[대표 N제]
상위권 대상, 하반기에 가장 중요한 수학 학습은
 1) 다양한 상황에 최대한 많이 노출되는 것
 2) 구멍 없이 실전개념 리마인드 + 내것으로 소화하기
두 마리 모두 놓치고 싶지 않은 당신, 백점백승하라!
 * 수학1+수학2 / 미적분 / 확률과 통계 **완강 임박**



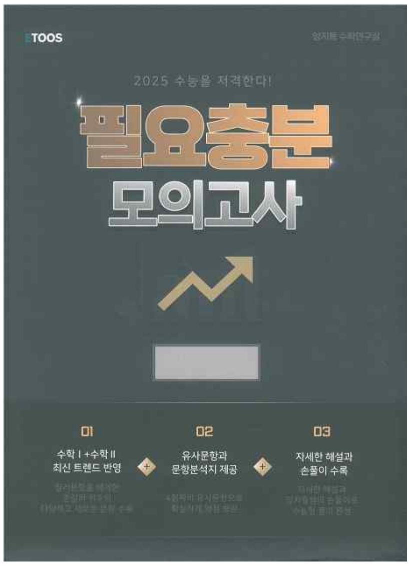
[대표 실전모의고사]
알고 있는 것을 실전에서 100% 발휘할 수 있도록
하반기에는 매주 1회씩 훈련 필수!
가장 실전적인 모의고사, 필요충분모의고사
 - 시즌4(4회 구성) “9평 반영”
 9월 중순 입고 예정!

- For 3등급 이하, 중하위권 학생



[1:1 첨삭 N제, 주간모의고사]

확실한 2등급을 만들기 위해서는
이미 약속된 풀이가 존재하는, 가장 빈출되는 유형에 대한 안정적인 점수 확보가 우선.
1:1 첨삭을 통해 풀이과정 교정 + 유사문항으로 정복
 - 시즌1, 2, 3 입고 완료, 시즌4 9월 예정



[대표 실전모의고사]

불안한 등급대일수록, 지금 시기에는
 1) 실전 시험 운용 전략 수립 및 연습
 2) 실수 줄이기, 맞출 수 있었던 문제 확실하게 챙기기
실전모의고사를 이용하여 반드시 채워나가야 한다.
가장 실전적인 모의고사, 필요충분모의고사
 - 시즌4(4회 구성) “9평 반영”
   9월 중순 입고 예정!

[막판 최종점검 강좌]

갈 곳 잃은 수학 공부, 수능은 봐야겠고, 어디부터
공부할지 모르겠는 너를 위한 강좌
2등급 이상 수강 금지!
반드시 출제되는 빈출 유형들에 대한 개념정리를
올해 평가원 기출문제를 이용하여 최종 정리
 - 9월 중순 입고 예정

□ 1회차 문항구성

번호	과목	배점	출제원리 및 목표	특이사항
1번	수학 I	2점	삼각함수의 연산	
2번	수학 II	2점	정적분의 연산	
3번	수학 II	3점	다항함수의 도함수	
4번	수학 I	3점	점화식에 대입해서 원하는 항 구하기	
5번	수학 I	3점	삼각함수의 정의와 최대/최소	
6번	수학 II	3점	함수의 연속을 활용한 0/0꼴 극한값 연산	
7번	수학 I	3점	거듭제곱근의 뜻과 성질	
8번	수학 I	3점	시그마의 공식과 간단한 성질	
9번	수학 II	4점	접선의 방정식을 활용한 연립부등식	
10번	수학 I	4점	지수함수의 그래프 개형 파악하기	
11번	수학 II	4점	움직인 거리와 위치변화량의 관계	2023 수능 20번 아이디어
12번	수학 I	4점	원주각의 성질을 이용한 사인/코사인법칙	
13번	수학 I	4점	등차수열의 합을 함수로 이해하기	신유형
14번	수학 II	4점	정적분으로 정의된 함수	
15번	수학 I	4점	점화식을 통한 수열의 결정	점화식 고난도
16번	수학 I	3점	지수, 로그의 연산	
17번	수학 II	3점	구간별로 정의된 정적분 함수	
18번	수학 II	3점	삼차함수의 극댓값과 극솟값	
19번	수학 I	3점	절댓값이 포함된 등비수열 결정	
20번	수학 II	4점	함수의 극한을 활용하여 함수 결정	신유형
21번	수학 I	4점	삼각함수의 그래프	신유형
22번	수학 II	4점	구간별로 정의된 함수	

번호	과목	배점	출제원리 및 목표	특이사항
23번	확률과 통계	2점	이항분포의 평균	
24번	확률과 통계	3점	확률의 배반사건	
25번	확률과 통계	3점	같은 것이 있는 순열을 이용한 나열	
26번	확률과 통계	3점	두 사건의 독립	
27번	확률과 통계	3점	모평균의 추정	
28번	확률과 통계	4점	원순열	2025 EBS 수특 변형
29번	확률과 통계	4점	정규분포를 이용한 확률의 계산	2025 EBS 수완 변형
30번	확률과 통계	4점	중복조합을 이용한 함수의 개수	

번호	과목	배점	출제원리 및 목표	특이사항
23번	미적분	2점	수열의 극한값 계산	
24번	미적분	3점	합성함수의 미분법	
25번	미적분	3점	입체도형의 부피	
26번	미적분	3점	매개변수 미분법	
27번	미적분	3점	치환적분법	
28번	미적분	4점	역함수의 미분법	
29번	미적분	4점	등비수열로 정의된 함수	2025 EBS 수완 변형
30번	미적분	4점	구간별로 정의된 함수의 부분적분	

제 1 회

2025학년도 필요충분 모의고사 시즌3 문제지

수학 영역

성명		수험 번호	

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

해가 뜨기 직전이 가장 어둡다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

양지용

수학연구실

2025학년도 필요충분 모의고사 시즌3 제1회 문제지

제 2 교시

수학 영역

양지용 수학연구실

5지선다형

1. $\sin\frac{5}{4}\pi+\cos\frac{3}{4}\pi$의 값은? [2점]

① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

2. $\int_{0}^{2}\left(2x^{3}+\frac{1}{2}\right)dx$ 의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

3. 함수 $f(x)=(x+2)\left(x^{2}-3x+1\right)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

4. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n+a_{n+1}=2n+1$$

을 만족시킨다. $a_1=2$일 때, a_3-a_4의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. $-\frac{1}{3} \le x \le a$에서 정의된 함수 $f(x) = \tan\frac{\pi}{2}x$의 최댓값과 최솟값의 곱이 -1일 때, a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

6. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 $f(4) \neq 0$이고, 모든 양수 x에 대하여

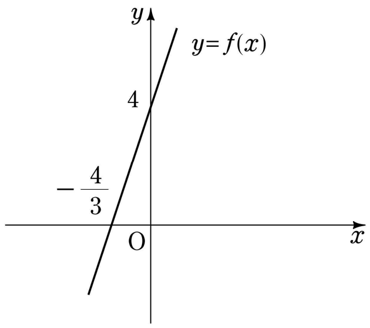
$$(2\sqrt{x}-a)f(x) = x-4$$

를 만족시킨다. $a \times f(4)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

7. 일차함수 $f(x) = 3x+4$의 그래프가 그림과 같다. $f(n)$의 네제곱근 중 실수인 것의 곱이 -5보다 크도록 하는 자연수 n의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10



8. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{7}(a_k+k)=40,\ \sum_{k=1}^{6}(a_{8-k}+5)=20$$

일 때, a_1의 값은? [3점]

① 13 ② 16 ③ 19 ④ 22 ⑤ 25

9. 삼차함수 $f(x)=x^3-18x^2+60x$가 다음 조건을 만족시킬 때, 자연수 n의 값의 합은? [4점]

> 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(n, f(n))$에서의 접선의 방정식은 $y=-|f'(n)|(x-n)+|f(n)|$이다.

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

10. 두 함수 $f(x)=3^x$, $g(x)=(1-n)2^{-x}+n$가 있다. x에 대한 부등식 $f(x)\le g(x)$을 만족하는 정수 x의 개수가 3이 되도록 하는 자연수 n의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

① 33 ② 36 ③ 39 ④ 42 ⑤ 45

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t=0$에서의 속도가 m이고 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

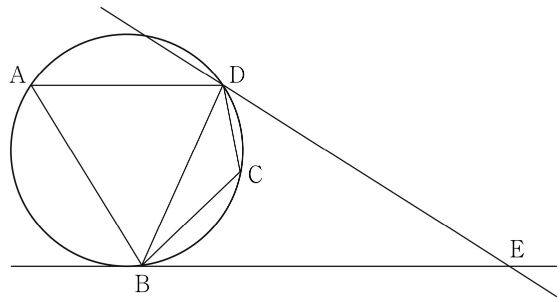
> (가) $0 \leq t \leq 2$일 때 $a(t) = -t(t-2)$
> (나) $t \geq 2$일 때 $v(t) = (t-4)^2 + k$

출발 후 점 P의 위치변화량과 점 P가 움직인 거리가 같도록 하는 m의 최솟값은? (단, m, k는 상수이다.) [4점]

① $\frac{4}{3}$　② $\frac{5}{3}$　③ 2　④ $\frac{7}{3}$　⑤ $\frac{8}{3}$

12. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 점 B에서의 접선과 점 D를 지나는 직선이 만나는 점을 E라 하자. $\angle \mathrm{BAD} + \angle \mathrm{BDC} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \sqrt{2}$이고, 삼각형 BDE의 넓이가 $4\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{DE}}$의 길이는? (단, $0 < \angle \mathrm{DBE} < \frac{\pi}{2}$이다.) [4점]

① $\sqrt{14}$　② $\sqrt{15}$　③ 4　④ $\sqrt{17}$　⑤ $3\sqrt{2}$



13. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 집합 T_n

$$T_n = \{S_k \mid k = 1, 2, 3, \cdots, n\}$$

이 다음 조건을 만족한다.

> (가) 집합 T_{21}의 원소의 개수는 21이고,
> 음수인 원소의 개수는 1이다.
> (나) 집합 T_{20}의 원소 중 가장 큰 값을 M_1,
> 두 번째로 큰 값을 M_2, 최솟값을 m이라 하면
> $M_1 - M_2 = 1$이고 $M_1 - m > 100$

M_2의 최솟값은? [4점]

① 150 ② 152 ③ 154 ④ 156 ⑤ 158

14. 어떤 자연수 a에 대하여 곡선 $y = x^3$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 곡선을 $y = f(x)$라 하자. 실수 t에 대하여

$$\int_t^k f(x)dx = 0$$

을 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 $g(t)$, $h(t)$라 할 때, 부등식 $|h(t)| \le g(a+1)$을 만족시키는 모든 정수 t의 개수가 99가 되도록 하는 a의 값은? [4점]

① 24 ② 25 ③ 26 ④ 27 ⑤ 28

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & (a_n>1) \\ a_1\times 2^n & (a_n\le 1) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_n \le 1$을 만족시키는 모든 자연수 n을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 b_1, b_2, b_3, $\cdots$라 하자. $b_1+b_2+b_3=55$일 때, 가능한 a_1의 값의 합은? [4점]

① 100 ② 104 ③ 108 ④ 112 ⑤ 116

단답형

16. 1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 $\dfrac{\log_a c}{\log_a b}=\dfrac{2}{3}$일 때, $b^{\log_c 9}$의 값을 구하시오. [3점]

17. 연속함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$\int_n^{n+2} f(x)dx=n^2$$

이고 $\int_3^6 f(x)dx=13$일 때, $\int_4^5 f(x)dx$의 값을 구하시오. [3점]

18. 함수 $f(x)=x^3-3x+5$의 극댓값과 함수 $y=-f(x-2)+a$의 극댓값이 같도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

19. 첫째항이 2이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $0 < S_n \le S_1$이다. 어떤 자연수 m에 대하여

$\left|a_m\right|+\left|a_{m+2}\right|=5\times\left|\dfrac{a_4}{a_3}\right|^m$이 성립할 때, $64\times S_6$의 값을 구하시오. [3점]

20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $n=2$ 또는 $n=3$일 때, 모든 실수 t에 대하여
> $$\lim_{x\to t}\frac{f(x)-x^n+ax^{n-1}}{(x-n)(x-4+n)}$$
> 의 값이 존재한다.

$f(6)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

21. $0 < x < 2\pi$에서 정의된 두 함수

$$f(x) = 5\cos x + n|\cos x|,\ g(x) = 12\sin x$$

의 그래프가 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ $(x_1 < x_2)$에서 만난다.

$x_2 - x_1 > \dfrac{\pi}{2}$, $y_1 y_2 > 0$가 되도록 하는 자연수 n의 값의 합을 구하시오 [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x) = x^2 - 2x + k$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{h(x) - f(x)\}\{h(x) - g(x)\} = 0$$

일 때, 양의 실수 a에 대하여 다음 조건을 만족한다.

(가) $\{x \mid f(x) = g(x)\} = \{0,\ a\}$
(나) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{h(x)}{h(-x)} = \infty$, $\lim_{x \to 0+} \dfrac{h(x) - 2}{x} = 3$

$f(a)$의 값이 $m - 2\sqrt{n}$ 일 때, $m + n$의 값을 구하시오.
(단, m, n 은 유리수이고, k는 상수이다.) [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

양지용 수학연구실

5지선다형

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)$을 따르고 $\mathrm{E}(X)=36$일 때, 자연수 n의 값은? [2점]

① 40 ② 44 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

24. 두 사건 A, B에 대하여 A^C와 B는 서로 배반사건이고,

$$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(A \cap B^C)=\frac{1}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{9}{20}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{11}{20}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

25. 흰 공 4개, 빨간 공 3개, 검은 공 2개를 일렬로 나열할 때, 양 끝에 서로 같은 색의 공이 위치하도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 색 공끼리는 서로 구분하지 않는다.) [3점]

① 310 ② 320 ③ 330 ④ 340 ⑤ 350

26. 자연수 n에 대하여 숫자 3이 적힌 카드 $n+4$장, 숫자 4가 적힌 카드 $n+3$장, 숫자 5가 적힌 카드 $n+2$장, 숫자 6이 적힌 카드 $n+1$장, 숫자 7이 적힌 카드 n장이 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 1장의 카드를 선택할 때, 홀수가 적힌 카드가 나오는 사건과 3의 배수가 적힌 카드가 나오는 사건이 서로 독립이 되도록 하는 n의 값은? [3점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

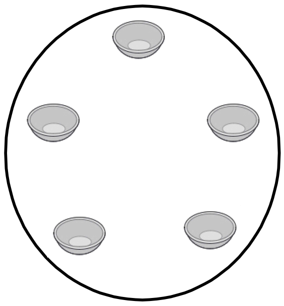
27. 어느 지역 학생들의 1일 SNS 숏폼 시청시간은 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역 학생 16명을 임의추출하여 얻은 1일 SNS 숏폼 시청시간의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $50.36 \le m \le a$이다. 이 지역 학생 36명을 임의추출하여 얻은 1일 SNS 숏폼 시청시간의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $b \le m \le 65.49$이다. $\overline{x_2} - \overline{x_1} = 9.61$일 때, $\sigma \times (b-a)$의 값은? (단, 시청시간의 단위는 분이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 24.28 ② 24.54 ③ 24.60 ④ 24.66 ⑤ 24.72

28. 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓인 같은 종류의 바구니 5개가 있다. 이 5개의 바구니에 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 흰 공 6개와 1부터 4까지의 자연수가 하나씩 적힌 검은 공 4개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수는 $n \times 4!$이다. 자연수 n의 값은? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) 각 바구니에 공을 2개씩 담는다.
(나) 검은 공만 담는 바구니는 없다.
(다) 한 바구니에 담는 두 공에 적힌 수의 곱이 홀수인 바구니의 개수는 1이다.

① 108 ② 144 ③ 180 ④ 216 ⑤ 252



단답형

29. 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) \le f(15),\ f(x+13) = g(10-x)$$

를 만족한다.
$0.3085 \le \mathrm{P}(Y \ge \sigma) \le 0.9332$ 를 만족하는 σ의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $5 \times (M+m)$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

30. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to Y$가 있다.

(가) $f(1) \le f(3) \le f(5)$, $f(2) \le f(4) \le f(6)$
(나) $f(5) < f(6)$

조건을 만족하는 함수 f에서 임의로 하나를 선택할 때, $f(1) > f(2)$일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

양지용 수학연구실

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{4+\frac{3}{n}}-2\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

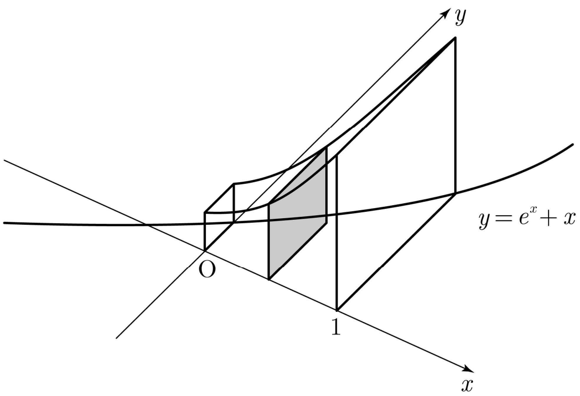
$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\frac{1}{3}$ 을 만족시킬 때, 함수

$g(x)=(f\circ f)(x)+f(x)$에 대하여 $g'(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

25. 곡선 $y=e^{x}+x$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]

① $\dfrac{e^2+1}{2}$ ② $\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{5}{6}$ ③ $\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{7}{6}$
④ $\dfrac{e^2+3}{2}$ ⑤ $\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{11}{6}$



26. 매개변수 $t\,(t>0)$ 로 나타내어진 곡선

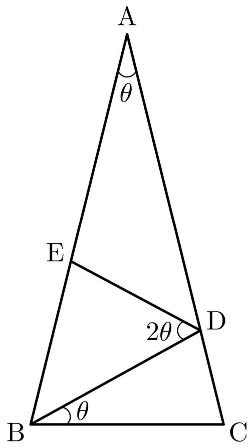
$$x=t^2-4t+4\ln t,\ \ y=t^2+3$$

에서, $\dfrac{dy}{dx}$ 의 최댓값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

27. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{BC}=1$, $\angle BAC=\theta$인 이등변삼각형 ABC에 대하여 변 AC 위에 $\angle CBD=\theta$인 점 D를 잡을 때, 선분 CD의 길이를 $f(\theta)$라 하고, 변 AB 위에 $\angle BDE=2\theta$인 점 E를 잡을 때, 선분 BE의 길이를 $g(\theta)$라 하자. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{g(\theta)}{f(\theta)}\right\}^3\sin\theta\,d\theta$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$ [3점]

① $\frac{5}{32}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$



28. $f'(0)=0$인 이차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g(f(x)f'(x))=f'(x)$이다.
(나) 방정식 $g(x)=f'(1)\times f(x)f'(x)$의 서로 다른 모든 실근이 -2, 0, 2이다.

$g'(0)=1$일 때, $g'\left(\frac{5}{8}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

단답형

29. 실수 $t\,(t\neq 0)$와 모든 자연수 m에 대하여 정의된 함수

$$f(m)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{t\times m^n+(4-m)^n}{m^n+2\times(4-m)^n}\right\}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

급수 $\sum_{m=1}^{\infty}\{f(m)\}^{m-3}$은 수렴하고 그 합은 8 보다 작다.

$20\times f(4)$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 t의 값의 합이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f(0)=g(0)$인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+1)=2f(x),\ f(2x)=\frac{f'(x)}{g(x)}$$

가 성립한다. $\int_0^1 f(x)dx=\frac{8}{3}$, $\int_0^n \frac{g'(x)f(x)}{\{g(x)\}^2}dx=85$

를 만족하는 자연수 n의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

1) [정답] ①

$$\sin\frac{5}{4}\pi+\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

2) [정답] ⑤

$$\int_0^2\left(2x^3+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x\right]_0^2$$
$=(8+1)-0$
$=9$

3) [정답] ②

$f'(x)=(x^2-3x+1)+(x+2)(2x-3)$이므로

$f'(2)=3$이다.

4) [정답] ①

$a_n+a_{n+1}=2n+1$ ⋯⋯ ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1+a_2=3,\ a_2=1$

㉠에 $n=2$를 대입하면

$a_2+a_3=5,\ a_3=4$

㉠에 $n=3$을 대입하면

$a_3+a_4=7,\ a_4=3$

$a_3-a_4=4-3=1$

5) [정답] ④

$f(x)=\tan\frac{\pi}{2}x$의 주기는 2이고,

$-\frac{1}{3}\le x\le a$에서 함수 $f(x)$는 증가함수이다.

따라서 $f(x)$의 최솟값은

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

최댓값과 최솟값의 곱이 -1이므로

함수 $f(x)$의 최댓값은 $\tan\frac{a}{2}\pi=\sqrt{3}$이어야 한다.

$\therefore\ a=\frac{2}{3}$

6) [정답] ①

$(2\sqrt{x}-a)f(x)=x-4$에서

모든 양수 x에 대하여 $f(x)=\frac{x-4}{2\sqrt{x}-a}$이다. (단, $x\ne\frac{a^2}{4}$)

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$f(4)=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{2\sqrt{x}-a}$이다.

이때, $f(4)\ne0$이고, (분자)$\to0$이므로

(분모)$\to0$에서 $4-a=0$이 되어 $a=4$이다.

$$f(4)=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{2\sqrt{x}-4}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}$$
$$=\frac{1}{2}\times(2+2)=2$$

$\therefore\ a\times f(4)=4\times2=8$

7) [정답] ③

$f(x)=3x+4$에 대하여

$f(n)$의 네제곱근 중 실수인 것의 곱은

$\sqrt[4]{f(n)}\times\left(-\sqrt[4]{f(n)}\right)=-\sqrt{f(n)}$이므로

이 값이 -5보다 크려면

$-\sqrt{f(n)}>-5$

$f(n)<25$

$3n+4<25$

$n<7$이므로 이를 만족하는 자연수 n의 값은 $1,2,3,4,5,6$으로 6개다.

8) [정답] ④

$$\sum_{k=1}^{7}(a_k+k)=\sum_{k=1}^{7}a_k+\frac{7\times8}{2}$$
$$=\sum_{k=1}^{7}a_k+28=40\text{이므로}$$

$\sum_{k=1}^{7}a_k=12$⋯⋯㉠

한편, $\sum_{k=1}^{6}(a_{8-k}+5)=20$에서

$\sum_{k=1}^{6}a_{8-k}+6\times5=20$에서

$\sum_{k=1}^{6}a_{8-k}=-10$⋯⋯㉡

$\sum_{k=1}^{6}a_{8-k}=a_7+a_6+\cdots+a_2=\sum_{k=2}^{7}a_k$이므로

이를 ㉡에 대입하면

$\sum_{k=2}^{7}a_k=-10$

㉠-㉡에서 $a_1=\sum_{k=1}^{7}a_k-\sum_{k=2}^{7}a_k=22$

9) ①

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(n,f(n))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(n)(x-n)+f(n)$이다.

이 접선이 $y=-|f'(n)|(x-n)+|f(n)|$와 같으므로

$f'(n)=-|f'(n)|$이고, $f(n)=|f(n)|$이다.

즉, $f'(n)\le0$이고 $f(n)\ge0$이어야 한다.

$f(x)=x^3-18x^2+60x$이므로

$f'(x)=3x^2-36x+60$

$=3(x^2-12x+20)$

$=3(x-2)(x-10)$이므로

$f'(n)\le0$에서 $2\le n\le10$ ⋯⋯㉠

또한, $f(x)=x(x^2-18x+60)$에서

방정식 $x^2-18x+60=0$의 두 실근은

$x=9-\sqrt{21},\ 9+\sqrt{21}$이고 $4<\sqrt{21}<5$이므로

삼차부등식 $x(x^2-18x+60)\ge0$의 해는

$0 \le x \le 9-\sqrt{21}$ 또는 $x \ge 9+\sqrt{21}$이다.

$4 < 9-\sqrt{21} < 5$이므로

이를 만족하는 자연수 n의 값은

$1 \le n \le 4$ 또는 $n \ge 14$ ……㉡

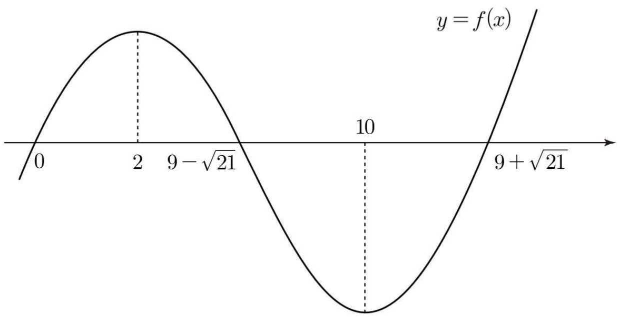
이다.

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 n의 값은

2, 3, 4이므로 그 합은 $2+3+4=9$이다.

〔참고〕

함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



10) [정답] ④

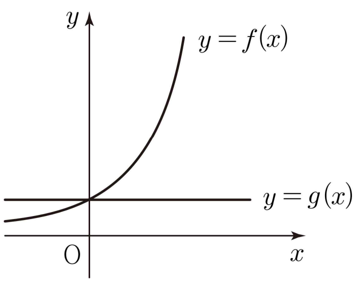
$f(0)=g(0)=1$이므로

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 모두 점 $(0, 1)$을 지난다.

ⅰ) $n=1$일 때

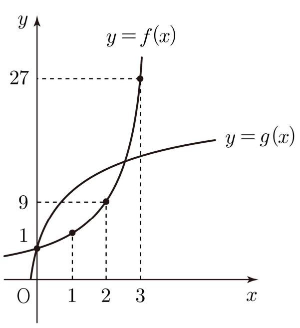
$y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 개형은 아래와 같으므로

부등식 $f(x) \le g(x)$을 만족하는 정수 x의 값은 무수히 많다.



ⅱ) $n \ge 2$일 때

$y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 개형은 아래와 같으므로



부등식 $f(x) \le g(x)$을 만족하는 정수 x의 개수가 3이 되려면

부등식의 실근 중에서 정수인 x의 값은 0, 1, 2이어야 한다.

이를 만족하려면 $g(2) \ge f(2)=9$, $g(3) < f(3)=27$이어야 하므로

$g(2) \ge 9$에서

$$\frac{1-n}{4}+n=\frac{3n+1}{4} \ge 9$$

$3n+1 \ge 36$, $3n \ge 35$이므로

$n \ge \frac{35}{3}$ ……㉠

또한, $g(3) < 27$에서

$$\frac{1-n}{8}+n=\frac{7n+1}{8} < 27$$

$7n+1 < 216$, $7n < 215$이므로

$n < \frac{215}{7}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{35}{3} \le n < \frac{215}{7}$이므로

이를 만족하는 자연수 n의 값은 12, 13, ⋯, 30이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $30+12=42$

[참고]

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 제 2사분면에서 교점을 가지는 경우, 즉, 주어진 부등식을 만족하는 정수 x의 값이 -2, -1, 0이 되는 경우도 생각해 볼 수 있다. 다만 이 경우 $f(-2) \le g(-2)$, $f(-3) > g(-3)$을 만족해야 하는데 $f(-2)=\frac{1}{9}$, $g(-2)=4-3n$이므로 2보다 크거나 같은 자연수 n에 대하여 $g(-2) < 0$이므로 $f(-2) \le g(-2)$를 만족하지 않는다.

11) [정답] ⑤

$0 \le t \le 2$에서 $a(t)=-t^2+2t$이므로

$0 \le t \le 2$에서 $v(t)=-\frac{1}{3}t^3+t^2+m$ ($\because$ $v(0)=m$)

$v(2)=-\frac{8}{3}+4+m=m+\frac{4}{3}$ ……㉠

이때, $t \ge 2$에서 $v(t)=(t-4)^2+k$이므로

$v(2)=4+k$ ……㉡

$v(t)$는 $t=2$에서 연속이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$m+\frac{4}{3}=4+k$, $k=m-\frac{8}{3}$이고,

출발 후 점 P의 위치변화량과 점 P가 움직인 거리가 같도록 하려면

$v(t) \ge 0$이어야 하므로

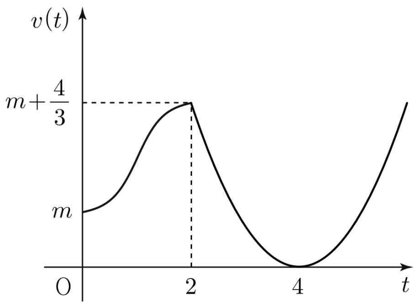
$v(t)$의 최솟값인 $v(4)=k$의 값이 0보다 크거나 같으면 된다.

$k=m-\frac{8}{3} \ge 0$, $m \ge \frac{8}{3}$

따라서 상수 m의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

[참고]

$m=\frac{8}{3}$일 때, $v(t)$의 그래프는 다음과 같다.

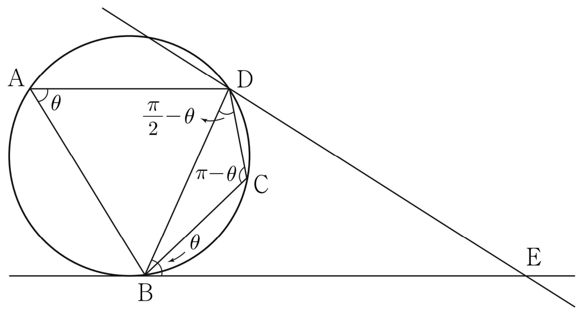


12) [정답] ③

$\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BDC}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle\mathrm{BAD}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\angle\mathrm{BDC}=\frac{\pi}{2}-\theta$이고, $\angle\mathrm{BCD}=\pi-\theta$이다.



$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=a$라 하면 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{2}a$이고,

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의해

$$\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\sqrt{2}a}{\sin(\pi-\theta)}=2\sqrt{3}$$

$$\frac{a}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}a}{\sin\theta}=2\sqrt{3}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이므로

$\frac{a}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}a}{\sin\theta}$에서 $\tan\theta=\sqrt{2}$

따라서 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이다.

이를 ㉠에 대입하면

$a=2$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=2$, $\overline{\mathrm{BD}}=2\sqrt{2}$ 이다.

또한, 직선 BE가 점 B에서의 접선이므로 $\angle\mathrm{DBE}=\angle\mathrm{BAD}=\theta$이다.

삼각형 BDE의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{BE}}\times\sin\theta=4\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{BE}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=4\sqrt{2}$$

$\overline{\mathrm{BE}}=2\sqrt{6}$

삼각형 BDE에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{\mathrm{DE}}^2=\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{BE}}^2-2\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{BE}}\times\cos\theta$$

$$=(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{6})^2-2\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=16$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DE}}=4$

13) ③

집합 $T_{21}=\{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{21}\}$의 원소의 개수가 21이므로

$S_n\ (n=1, 2, 3, \cdots 21)$의 값은 모두 다르고,

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 할 때,

ⅰ) $d>0$이면

$S_1<0$이고 2 이상의 자연수 n에 대하여 $S_n>0$이다.

즉, $a_1<0$, $S_2>0$이고 $M_1=S_{20}$, $M_2=S_{19}$이므로

$M_1-M_2=S_{20}-S_{19}=a_{20}=1$

즉, $a_1+19d=1$이고, $S_2=2a_1+d>0$에서

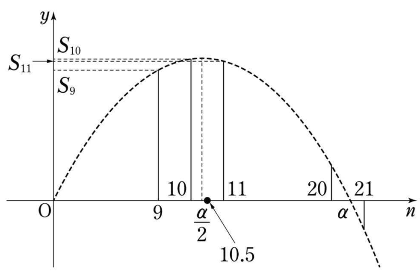
$2(1-19d)+d>0$

$37d<2$ 즉, $d<\frac{2}{37}$을 만족하는

양의 정수 d는 존재하지 않는다.

ⅱ) $d<0$일 때

조건 (가) 의하여 $S_{20}>0$, $S_{21}<0$이다. $\cdots\cdots$[참고]



이차함수로서 $S_\alpha=0\ (20<\alpha<21)$이라 하면

$10<\frac{\alpha}{2}<10.5$이므로

$M_1=S_{10}$, $M_2=S_{11}$, $m=S_{20}$임을 알 수 있다.

$M_1-M_2=S_{10}-S_{11}=-a_{11}=1$이므로

$a_{11}=-1$이므로

또한, $M_1-m=S_{10}-S_{20}$

$$=-(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20})$$

$$=-\frac{10\times(a_{11}+a_{20})}{2}$$

$$=-5\times(2a_{11}+9d)$$

$$=-5(-2+9d)\quad(\because\ a_{11}=-1)$$

$$=10-45d$$

이때, $M_1-m>100$에서 $10-45d>100$,

$45d<-90$, $d<-2$이다.

$$M_2=S_{11}=11\times a_6$$

$$=11\times(a_{11}-5d)$$

$$=11\times(-1-5d)$$

$$=-11-55d$$

의 최솟값은 $d=-3$일 때 $-11+165=154$이다.

[참고]

$S_{20}=0$이면

$S_1=S_{19},\ S_2=S_{18},\ \cdots,\ S_9=S_{11}$이므로

집합 T_{21}의 원소의 개수가 21일 수 없다.

따라서 $S_{20}>0$이다.

14) 정답 ①

(해설)

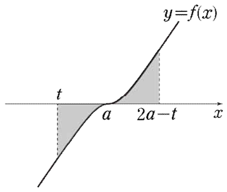
곡선 $y=x^3$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 곡선이 $y=f(x)$이므로 $f(x)=(x-a)^3$이다.

곡선 $y=x^3$은 원점에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(a,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

ⅰ) $t<a$일 때

$\int_t^k f(x)dx=0$을 만족시키는 실수 k는

$k=t,\ k=2a-t$이다. ……[참고]

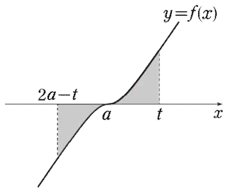


$g(t)=2a-t\ (t<a),\ h(t)=t\ (t<a)$

ⅱ) $t\ge a$일 때

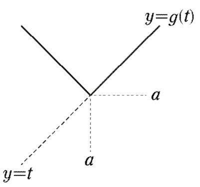
$\int_t^k f(x)dx=0$을 만족시키는 실수 k는

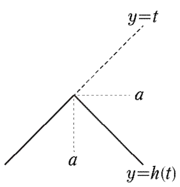
$k=t,\ k=2a-t$이다.



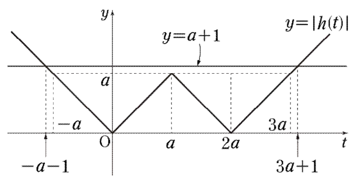
$g(t)=t\ (t\ge a),\ h(t)=2a-t\ (t\ge a)$

이상에서 $g(t)=\begin{cases}2a-t & (t<a)\\ t & (t\ge a)\end{cases}$, $h(t)=\begin{cases}t & (t<a)\\ 2a-t & (t\ge a)\end{cases}$이다.





자연수 a에 대하여 $y=|h(t)|$의 그래프는 다음 그림과 같고, $g(a+1)=a+1$이므로



부등식 $|h(t)|\le a+1$을 만족시키는 정수 t는 $-a-1,\ -a,\ \cdots,\ 3a+1$로 $(3a+1)-(-a-1)+1=4a+3$개가 있다.

따라서 $4a+3=99$에서 $a=24$이다.

[참고]

k에 대한 함수 $i(k)=\int_t^k f(x)dx\ (t<a)$에 대하여 $i(t)=0$이고 $\frac{d}{dk}i(k)=f(k)$이다. 이때 함수 $f(k)$는 $k=a$의 좌우에서만 부호가 바뀌므로

[음⟶양] 함수 $i(k)$는 1개의 극솟값만을 갖는다. 따라서 $i(k)=0$을 만족시키는 실수 k는 2개다.

다음과 같은 계산을 통해서도 확인할 수 있다.

$$\int_t^k (x-a)^3dx=\left[\frac{1}{4}(x-a)^4\right]_t^k$$
$$=\frac{1}{4}(k-a)^4-\frac{1}{4}(t-a)^4=0$$

$|k-a|=|t-a|$에서 $k=t$ 또는 $k=2a-t$이다.

15) [정답] ①

ⅰ) $a_1=1$인 경우

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	2	1	2^3	2^2	2	1
b_1		b_2				b_3

$b_3=7$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

ⅱ) $a_1>1$인 경우

$a_1=a$라 하고, $2^k<a\le 2^{k+1}$라 하자. (단, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)

$a_k=\frac{a}{2^{k-1}}$

$a_{k+1}=\frac{a}{2^k}$

a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{k+2}	$\cdots$	a_{3k+6}	$\cdots$	a_{7k+14}	
a	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2^2}$	$\cdots$	$\frac{a}{2^{k+1}}$	$\cdots$	$\frac{a}{2^{k+1}}$	$\cdots$	$\frac{a}{2^{k+1}}$	
				b_1		b_2		b_3	

$a_{k+2}=\frac{a}{2^{k+1}}$이므로 $\frac{1}{2}<a_{k+2}\le 1$ 가 되어 $b_1=k+2$이다.

$a_{k+3}=a\times 2^{k+2}$

이때, $2^{2k+2}<a_{k+3}\le 2^{2k+3}$이므로

같은 방식으로

$\frac{1}{2}<a_{(k+3)+(2k+3)}\le 1$

$\frac{1}{2}<a_{3k+6}\le 1$가 되어 $b_2=3k+6$이다.

$a_{3k+7}=a\times 2^{3k+6}$

이때, $2^{4k+6}<a_{3k+7}\le 2^{4k+7}$이므로

$\frac{1}{2}<a_{(3k+7)+(4k+7)}\le 1$

$\frac{1}{2}<a_{7k+14}\le 1$이므로 $b_3=7k+14$

따라서 $b_1+b_2+b_3=(k+2)+(3k+6)+(7k+14)$

$=11k+22=55$에서

$k=3$이다.

따라서 a_1의 값이 될 수 있는 값은

$2^3 < a \le 2^4$을 만족하는 자연수이므로

이를 만족하는 자연수 a_1의 값의 합은

$$9+10+11+\cdots+16=\frac{8(9+16)}{2}=100$$

16) [정답] 27

$$\frac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c=\frac{2}{3}$$

따라서

$$b^{\log_c 9}=9^{\log_c b}=9^{\frac{1}{\log_b c}}$$

$$=9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$=3^3=27$$

17) [정답] 12

모든 자연수 n에 대하여 $\int_n^{n+2} f(x)dx=n^2$이므로 $n=3,\ 4$를 대입하면

$$\int_3^5 f(x)dx=9 \qquad \cdots ㉠$$

$$\int_4^6 f(x)dx=16 \qquad \cdots ㉡$$

문제의 조건에서

$$\int_3^6 f(x)dx=13 \qquad \cdots ㉢$$

이므로 ㉠$+$㉡$-$㉢에서

$\int_4^5 f(x)dx=9+16-13=12$이다.

18) [정답] 10

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$이므로

$f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 3을 갖고,

$x=-1$에서 극댓값 7을 갖는다.

이때, 함수 $y=-f(x-2)+a$는

$x=3$에서 극댓값 $-3+a$를 가지므로

$7=-3+a$에서 $a=10$

19) [정답] 84

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

모든 자연수 n에 대하여 $0<S_n \le S_1$이므로

$n=2$일 때 $0<S_2 \le S_1$

이때 $S_1=a_1=2,\ S_2=a_1+a_2=2+2r$이므로

$0<2+2r \le 2$에서 $-1<r \le 0$

$r \ne 0$이므로 $-1<r<0$ $\cdots\cdots$ ㉠

또한 어떤 자연수 m에 대하여

$|a_m|+|a_{m+2}|=5\times\left|\frac{a_4}{a_3}\right|^m$ 이 성립하므로

$|2r^{m-1}|+|2r^{m+1}|=5|r|^m$

$2|r|^{m-1}+2|r|^{m+1}=5|r|^m$

양변을 $|r|^{m-1}$으로 나누면

$2+2|r|^2=5|r|$

$2|r|^2-5|r|+2=0$

$(2|r|-1)(|r|-2)=0$

$|r|=\frac{1}{2}$ 또는 $|r|=2$

㉠에 의하여 $r=-\frac{1}{2}$

따라서

$$S_6=\frac{2\times\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}\times\frac{63}{64}=\frac{21}{16}$$

$\therefore\ 64\times S_6=84$

20) 정답 100

ⅰ) $n=2$이면 분모의 식이 $(x-2)^2$이므로

조건을 만족시키기 위해서는

$f(x)-x^2+ax=(x-2)^2(x+c)$ (단, c는 상수)에서

$f(x)=(x-2)^2(x+c)+x^2-ax$ $\cdots$ ㉠

ⅱ) $n=3$이면 분자의 다항식이 이차식이므로,

조건을 만족시키기 위해서는

$f(x)-x^3+ax^2=b(x-1)(x-3)$ (단, b는 상수)에서

$f(x)=x^3-ax^2+b(x-1)(x-3)$ $\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$(x-2)^2(x+c)+x^2-ax=x^3-ax^2+b(x-1)(x-3)$ $\cdots$ ㉢

이때, ㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면 $1+c+1-a=1-a$에서

$c=-1$ $\cdots$ ㉣

또한 ㉢의 양변에 $x=3$을 대입하면 $c+3+9-3a=27-9a$에서

$a=\frac{8}{3}$ $\cdots$ ㉤

㉣, ㉤을 ㉠에 대입하면

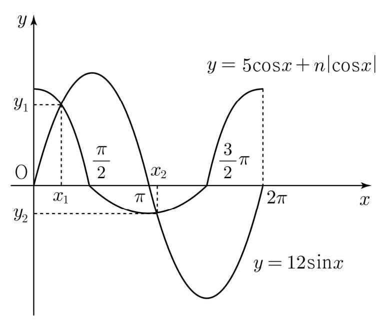
$f(x)=(x-2)^2(x-1)+x^2-\frac{8}{3}x$이므로

$\therefore\ f(6)=100$

21) [정답] 63

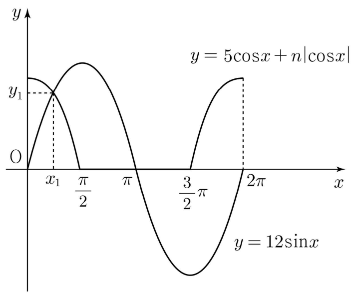
\# 수학Ⅰ - 삼각함수
\# KEY POINT : 삼각함수의 그래프

ⅰ) $n<5$일 때



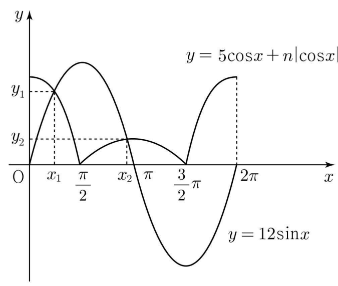
$x_1 < \frac{\pi}{2}$, $x_2 > \pi$ 이므로 $x_2 - x_1 > \frac{\pi}{2}$ 이지만, $y_1 > 0$, $y_2 < 0$이므로 $y_1 y_2 < 0$이다.

ⅱ) $n = 5$일 때



$y_2 = 0$이므로 $y_1 y_2 = 0$이다.

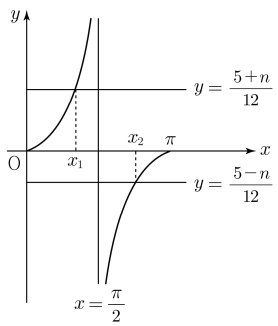
ⅲ) $n > 5$일 때



$y_1 y_2 > 0$를 만족한다.

점 (x_1, y_1)은 두 곡선 $y = (5+n)\cos x$와 $y = 12\sin x$의 교점이고,

점 (x_2, y_2)는 두 곡선 $y = (5-n)\cos x$와 $y = 12\sin x$의 교점이다.



즉, $(5+n)\cos x_1 = 12\sin x_1$에서 $\tan x_1 = \frac{5+n}{12}$이고,

$(5-n)\cos x_2 = 12\sin x_2$에서 $\tan x_2 = \frac{5-n}{12}$이다.

$x_2 - x_1 > \frac{\pi}{2}$일 때, $x_2 > \frac{\pi}{2} + x_1$

$0 < x_1 < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x_2 < \pi$에서 $\tan x_1 > 0$, $\tan x_2 < 0$이므로

$\tan x_2 > \tan\left(\frac{\pi}{2} + x_1\right)$이다.

양변에 $\tan x_1$을 곱하면

$\tan x_1 \times \tan x_2 > \tan x_1 \times \tan\left(\frac{\pi}{2} + x_1\right)$

이때, $\tan x_1 \times \tan\left(\frac{\pi}{2} + x_1\right) = \tan x_1 \times \left(-\frac{1}{\tan x_1}\right) = -1$이므로

$\tan x_1 \times \tan x_2 > -1$이 성립한다.

즉, $x_2 - x_1 > \frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{5+n}{12} \times \frac{5-n}{12} > -1$

$25 - n^2 > -144$

$n^2 < 169$이므로 $n < 13$이다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 주어진 조건을 만족하는 자연수 n의 범위는 $5 < n < 13$이다.

$n = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$이므로 그 합은

$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 63$

22) [정답] 12

 # 수학Ⅱ - 미분
 # KEY POINT : 구간별로 정의된 함수

$\{h(x) - f(x)\}\{h(x) - g(x)\} = 0$이므로

$h(x) = f(x)$ 또는 $h(x) = x^2 - 2x + k$이다.

또한, 함수 $h(x)$가 연속이고, 조건 (가)에 의하여 방정식 $f(x) = g(x)$의 실근이 0과 a뿐이므로

함수 $h(x)$는

각 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, a)$, (a, ∞)에서 $f(x)$ 또는 $g(x)$이다.

이때, $\lim_{x \to \infty} \frac{h(x)}{h(-x)} = \infty$이므로

$x < 0$에서 $h(x) = g(x)$이고, $x > a$에서 $h(x) = f(x)$이다.

이때, 조건 (나)의 $\lim_{x \to 0+} \frac{h(x) - 2}{x} = 3$에서 (분모)$\to 0$이므로

$h(0) = 2$고 함수 $h(x)$가 $x = 0$에서 연속이므로

$g(0) = 2$이므로 $k = 2$이다.

또한, 조건 (나)에서

$\lim_{x \to 0+} \frac{h(x) - h(0)}{x} = 3$이므로

함수 $h(x)$의 $x = 0$에서의 우미분계수는 3이다.

이때, $g'(x) = 2x - 2$에서 $g'(0) = -2 \neq 3$이므로

구간 $(0, a)$에서 $h(x) = f(x)$이다.

즉, $f'(0) = 3$이고 함수 $h(x)$가 $x = 0$에서 연속이므로

$f(0) = h(0) = 2$이다.

따라서 $f(x) = x^3 + px^2 + 3x + 2$라 하면 (단, p는 상수)

함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프는 $x = a$에서 접해야 한다.

즉, 방정식 $f(x) = g(x)$는 $x = a$를 중근으로 가진다.

방정식 $x^3 + px^2 + 3x + 2 = x^2 - 2x + 2$에서

$x^3 + (p-1)x^2 + 5x = 0$

$x\{x^2 + (p-1)x + 5\} = 0$

$p - 1 = -2\sqrt{5}$, $a = \sqrt{5}$이므로

$\therefore\ f(a) = g(\sqrt{5})$

$= 5 - 2\sqrt{5} + 2$

$= 7 - 2\sqrt{5}$이므로

$m + n = 7 + 5 = 12$ (완)

23) [정답] ③

 # 확률과 통계 - 통계
 # KEY POINT : 이항분포의 평균

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{3}{4}=36$에서 $n=48$이다. (완)

24) [정답] ②

\# 확률과 통계 - 확률
\# KEY POINT : 확률의 배반사건

두 사건 A^C와 B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=0$이다.

따라서 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$ (완)

25) [정답] ⑤

\# 확률과 통계 - 경우의 수
\# KEY POINT : 같은 것이 있는 순열을 이용한 나열

ⅰ) 양 끝에 흰 공이 위치하는 경우

남은 흰 공 2개, 빨간 공 3개, 검은 공 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!3!2!}=210$

ⅱ) 양 끝에 빨간 공이 위치하는 경우

남은 흰 공 4개, 빨간 공 1개, 검은 공 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!2!}=105$

ⅲ) 양 끝에 검은 공이 위치하는 경우

남은 흰 공 4개, 빨간 공 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!3!}=35$

ⅰ)~ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$210+105+35=350$ (완)

26) [정답] ②

\# 확률과 통계 - 확률
\# KEY POINT : 두 사건의 독립

주머니에 들어있는 카드는 총 $5n+10$장이다.

이중에서 홀수가 적힌 카드는

$(n+4)+(n+2)+n=3n+6$장이고,

3의 배수가 적힌 카드는

$(n+4)+(n+1)=2n+5$장이다.

3의 배수이면서 홀수인 숫자는 3이므로

3이 적힌 카드는 $n+4$장이다.

두 사건이 서로 독립이려면

$\frac{2n+5}{5n+10}\times\frac{3n+6}{5n+10}=\frac{n+4}{5n+10}$ 이 성립해야 한다.

$\frac{3}{5}(2n+5)=n+4,\ 6n+15=5n+20$

$\therefore\ n=5$ (완)

27) ②

모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$

$\overline{x_1}-0.49\sigma\le m\le\overline{x_1}+0.49\sigma$

$\overline{x_1}-0.49\sigma=50.36,\ \overline{x_1}+0.49\sigma=a$ ……㉠

모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}$

$\overline{x_2}-0.43\sigma=b,\ \overline{x_2}+0.43\sigma=65.49$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\overline{x_2}+0.43\sigma\right)-\left(\overline{x_1}-0.49\sigma\right)=65.49-50.36$

$\overline{x_2}-\overline{x_1}+0.92\sigma=15.13$

$0.92\sigma=15.13-9.61=5.52$

즉, $\sigma=6$

따라서

$\sigma\times(b-a)=6\times\left\{\left(\overline{x_2}-0.43\sigma\right)-\left(\overline{x_1}+0.49\sigma\right)\right|$

$=6\times\left\{\left(\overline{x_2}-\overline{x_1}\right)-0.92\sigma\right\}$

$=6\times(9.61-5.52)=24.54$

28)

〔정답〕 ④

ⅰ) 1, 3이 적힌 검은 공 중에서 하나만 홀수가 적힌 흰 색 공과 같은 바구니에 담기는 경우

1, 3이 적힌 검은 공 중에서 하나를 선택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1$

1, 3, 5가 적힌 흰 공 중에서 하나를 택하여 홀수가 적힌 검은 공과 같은 바구니에 담는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

2, 4, 6이 적힌 검은 공 중에서 하나를 택하여 홀수가 적힌 검은 공과 같은 바구니에 담는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

남은 흰 공 4개를 빈 1개의 바구니와 검은 공이 각각 1개씩 들어있는 바구니에 각각 2개, 1개, 1개씩 집어넣는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2\times2!$이고, 그 중에서 홀수가 적힌 흰 공 2개가 비어있는 2개의 바구니에 들어가는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times\left({}_4\mathrm{C}_2\times2!-2!\right)$

$=180$

ⅱ) 1, 3이 적힌 검은 공 모두가 짝수가 적힌 흰 색 공과 같은 바구니에 담기는 경우

짝수가 적힌 흰색 공을 하나씩 1, 3이 적힌 흰 공이 있는 바구니에 담는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=6$

이때, 홀수가 적힌 흰 색 공 3개 중 2개를 비어있는 바구니 1개에 담는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$

남아있는 흰 공 2개를 바구니에 남는 경우의 수는 2!이므로 구하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{C}_2\times2!=36$

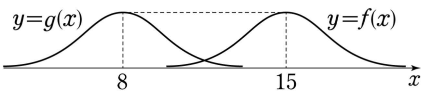
ⅰ), ⅱ)에 의하여 같은 종류의 바구니 5개에 공 10개를 나누어 담는 경우의 수는

$180+36=216$

이고, 이 5개의 바구니를 원형으로 나열하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!$
따라서 구하는 경우의 수는
$216\times 4!$
$\therefore\ n=216$

29) [정답] 96

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(15)$이므로 확률변수 X의 평균은 15이다.
조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+13)=g(10-x)$이므로 $10-x=t$라 하면
모든 실수 t에 대하여 $g(t)=f(23-t)$이다.
이때, $f(23-t)=f(-(t-23))$이므로
함수 $y=f(23-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를
y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 23만큼 평행이동한 것이므로
확률변수 Y의 평균은 $-15+23=8$
이고 확률변수 Y의 표준편차는 X의 표준편차와 같다.



$$\mathrm{P}(Y\ge \sigma)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{\sigma-8}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\ge 1-\frac{8}{\sigma}\right)$$

이고, $\mathrm{P}(Y\ge\sigma)$의 값은 σ가 최소일 때 최댓값 0.9332를 갖고,
σ가 최대일 때 최솟값 0.3085을 갖는다.

$0.3085\le \mathrm{P}\left(Z\ge 1-\frac{8}{\sigma}\right)\le 0.9332$이므로

$\mathrm{P}\left(Z\ge 1-\frac{8}{\sigma}\right)\le 0.9332$에서

$1-\frac{8}{\sigma}\ge -1.5$, $\frac{8}{\sigma}\le 2.5$이므로 $\sigma\ge\frac{16}{5}$ ……㉠

$\mathrm{P}\left(Z\ge 1-\frac{8}{\sigma}\right)\ge 0.3085$에서

$1-\frac{8}{\sigma}\le 0.5$, $\frac{1}{2}\le\frac{8}{\sigma}$이므로 $\sigma\le 16$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{16}{5}\le\sigma\le 16$

$\therefore\ 5\times(M+m)=5\times\left(\frac{16}{5}+16\right)=96$

30) [정답] 74

조건 (가)를 만족하는 함수 f의 개수 ${}_5\mathrm{H}_3\times{}_5\mathrm{H}_3=35^2=1225$이고
여기에서 $f(5)=f(6)$를 만족하는 함수 f의 개수를 제외하면
$f(5)<f(6)$ 또는 $f(5)>f(6)$를 만족하는 함수만 남게 되는데
두 함수의 개수는 동일하므로 다음과 같이 함수의 개수를 구할 수 있다.
$f(5)=f(6)$를 만족하는 함수 f의 개수는 다음과 같이 계산이 가능하다.
$f(5)=f(6)=1$인 경우 ${}_1\mathrm{H}_2\times{}_1\mathrm{H}_2=1$
$f(5)=f(6)=2$인 경우 ${}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_2=9$
$f(5)=f(6)=3$인 경우 ${}_3\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_2=36$
$f(5)=f(6)=4$인 경우 ${}_4\mathrm{H}_2\times{}_4\mathrm{H}_2=100$
$f(5)=f(6)=5$인 경우 ${}_5\mathrm{H}_2\times{}_5\mathrm{H}_2=225$
를 제외하면
$1225-(1+9+36+100+225)=854$이고
이는 $f(5)<f(6)$ 또는 $f(5)>f(6)$를 만족하는 함수의 개수의 합이므로
$f(5)<f(6)$를 만족하는 함수의 개수는 $\frac{854}{2}=427$이다.

이 중 $f(1)>f(2)$을 만족하는 함수 f의 개수는 다음과 같이 $f(1), f(2), f(5), f(6)$의 값을 설정해서 구할 수 있다.
($\because\ f(1)\le f(5),\ f(2)\le f(6)$)

ⅰ) $f(5)=1$인 경우 $f(1)=1$이므로 $f(1)>f(2)$을 만족하는 함수 f는 존재하지 않는다.

ⅱ) $f(5)=2$인 경우 $f(1)=2$이므로 ($\because\ f(1)=1$이면 조건을 만족하는 함수가 존재하지 않는다.)

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$
2	1	2	1, 2, 3	2	3
			1, 2, 3, 4		4
			1, 2, 3, 4, 5		5

위 표와 같이 함숫값이 결정될 수 있으므로
조건을 만족하는 함수 f의 개수는 $3+4+5=12$이다.

ⅲ) $f(5)=3$인 경우

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$
2	1	2, 3	1, 2, 3, 4	3	4
3	1	3	1, 2, 3, 4		
	2		2, 3, 4		
2	1	2, 3	1, 2, 3, 4, 5		5
3	1	3	1, 2, 3, 4, 5		
	2		2, 3, 4, 5		

위 표와 같이 함숫값이 결정될 수 있으므로
조건을 만족하는 함수 f의 개수는
$2\times 4+(4+3)+2\times 5+(5+4)=34$이다.

ⅳ) $f(5)=4$인 경우

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$
2	1	2, 3, 4	1, 2, 3, 4, 5	4	5
3	1	3, 4	1, 2, 3, 4, 5		
	2		2, 3, 4, 5		
4	1	4	1, 2, 3, 4, 5		
	2		2, 3, 4, 5		
	3		3, 4, 5		

위 표와 같이 함숫값이 결정될 수 있으므로
조건을 만족하는 함수 f의 개수는
$3\times 5+2\times(5+4)+(5+4+3)=45$이다.

ⅰ)~ⅳ)에서 구하는 함수 f의 개수는 $12+34+45=91$

그러므로 구하는 확률은 $\frac{91}{427}=\frac{13}{61}$

$\therefore\ p+q=61+13=74$ (완)

31) [정답] ③

미적분 - 수열의 극한
KEY POINT : 수열의 극한값 계산

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{4+\frac{3}{n}}-2\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\times\frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}$$
$$=\frac{3}{4}$$

32) [정답] ④

미적분 - 미분법
KEY POINT : 합성함수 미분법

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\frac{1}{3}$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고

극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-2\}=0$에서 $f(2)=2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=f'(2)=\frac{1}{3}$$

함수 $g(x)=(f\circ f)(x)+f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f'(f(x))\times f'(x)+f'(x)$이고, $x=2$를 대입하면

$\therefore\ g'(2)=f'(f(2))\times f'(2)+f'(2)$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

33) [정답] ⑤

미적분 - 적분법
KEY POINT : 입체도형의 부피

단면인 정사각형의 한 변의 길이가 e^x+x이므로

넓이는 $(e^x+x)^2$이다. 따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\therefore \int_0^1 (e^x+x)^2dx=\int_0^1(e^{2x}+2xe^x+x^2)dx$$
$$=\left[\frac{e^{2x}}{2}+2(xe^x-e^x)+\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$=\left\{\frac{e^2}{2}+2(e-e)+\frac{1}{3}\right\}-\left\{\frac{1}{2}+2(0-1)\right\}$$
$$=\frac{e^2}{2}+\frac{11}{6}$$

34) [정답] ②

미적분 - 미분법
KEY POINT : 매개변수 미분법 + 함수의 최대/최소

$x=t^2-4t+4\ln t,\ y=t^2+3$에서

$\frac{dx}{dt}=2t-4+\frac{4}{t},\ \frac{dy}{dt}=2t$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{2t-4+\frac{4}{t}}=\frac{t^2}{t^2-2t+2}$이다.

$t>0$에서 $\frac{t^2}{t^2-2t+2}$의 최댓값을 찾아야 하므로

$f(t)=\frac{t^2}{t^2-2t+2}\ (t>0)$라 하고, 양변을 t에 대하여 미분하면

$$f'(t)=\frac{2t(t^2-2t+2)-t^2(2t-2)}{(t^2-2t+2)^2}$$
$$=\frac{-2t^2+4t}{(t^2-2t+2)^2}$$
$$=\frac{-2t(t-2)}{(t^2-2t+2)^2}$$

따라서 $t=2$에서 극댓값이자 최댓값을 갖는다. $(\because\ t^2-2t+2>0)$

$$\therefore\ f(2)=\frac{2^2}{2^2-2\times 2+2}=2$$

35) [정답] ③

미적분 - 적분법
KEY POINT : 치환적분법 + 사인법칙

주어진 조건에서 $\angle\mathrm{BAC}=\theta,\ \angle\mathrm{CBD}=\theta$이고

$\angle\mathrm{BCA}=\angle\mathrm{BCD}$이므로

두 삼각형 ABC와 BCD는 서로 닮음이다.

따라서 삼각형 BCD는 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BD}}$ 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=1$이고,

$\overline{\mathrm{CD}}=2\sin\frac{\theta}{2}\ \Rightarrow\ \therefore\ f(\theta)=2\sin\frac{\theta}{2}$ ……㉠

이때, $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$이므로 $\angle\mathrm{EBD}=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta$이고,

삼각형 EBD에서 $\angle\mathrm{BED}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$

따라서 삼각형 EBD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\overline{\mathrm{BE}}}{\sin 2\theta}\ \Rightarrow\ \therefore g(\theta)=\frac{\sin 2\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\frac{\sin 2\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$

$$=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$$

이므로 구하고자 하는 값은 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}8\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta$이다.

$\cos\theta=t$로 치환하면 $-\sin\theta d\theta=dt$이고,

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\therefore\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}8\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}8t^3(-dt)$$
$$=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}8t^3dt$$

$$= \left[2t^4\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 2 \times \left(\frac{9}{16} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{5}{8}$$

36) [정답] ④

 # 미적분 - 미분법
 # KEY POINT : 합성함수 + 역함수 미분법

$f(x) = ax^2 + b$ $(a \neq 0)$으로 놓으면 조건 (가)에 의하여

$$g(2a^2x^3 + 2abx) = 2ax \Leftrightarrow \frac{1}{2a}g(2a^2x^3 + 2abx) = x$$

이다. 이때

$$g_1(x) = \frac{1}{2a} \times g(x) = \frac{1}{f'(1)} \times g(x), \quad h(x) = 2a^2x^3 + 2abx$$

로 놓으면 $g_1(h(x)) = x$ 이고, $g_1(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

($\because$ $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능)

두 함수 $g_1(x)$, $h(x)$ 는 서로 역함수 관계이다.

또한 모든 실수 x 에 대하여

$$h'(x) = 6a^2x^2 + 2ab > 0 \Rightarrow ab > 0 \cdots ㉠$$

이어야 한다.

한편, 조건 (나)에 의하여

$$g_1(x) = h(x) \Leftrightarrow g(x) = f'(1) \times f(x)f'(x)$$

의 서로 다른 모든 실근이 -2, 0, 2 이고, $h(x)$ 가 증가함수이므로

$$h(2) = 2, \quad h(0) = 0, \quad h(-2) = -2 \cdots ㉡$$

이다. 이때 ㉡에 의하여

$$8a^2 + 2ab = 1 \cdots ㉢$$

이고,

$$g'(0) = 2a \times g_1{}'(0) = 2a \times \frac{1}{h'(0)} = 1 \Leftrightarrow b = 1$$

이다. 따라서 $b = 1$ 을 ㉢에 대입하면

$$8a^2 + 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow (4a-1)(2a+1) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \quad (\because ㉠)$$

이고, $h(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x$ 이다.

$$\therefore g'\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{h'(1)} = \frac{4}{7}$$

37) [정답] 13

 # 미적분 - 수열의 극한
 # KEY POINT : 등비수열로 정의된 함수 + 등비급수의 합

$m < 4 - m$ $(m = 1)$인 경우

$$f(m) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{t + 3^n}{1 + 2 \times 3^n}\right) = \frac{1}{2}$$

이고, $m = 4 - m$ $(m = 2)$인 경우

$$f(m) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(t+1) \times 2^n}{3 \times 2^n}\right\} = \frac{t+1}{3}$$

이다. 같은 방법으로, $m > 4 - m$ $(m \geq 3)$인 경우

$$f(m) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{t \times m^n + (4-m)^n}{m^n + 2 \times (4-m)^n}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{t + \left(\frac{4-m}{m}\right)^n}{1 + 2 \times \left(\frac{4-m}{m}\right)^n}\right\}$$

이고, $\left|\frac{4-m}{m}\right| < 1$ 이므로 $f(m) = t$ 이다.

따라서 조건에 의하여 급수 $\sum_{m=1}^{\infty}\{f(m)\}^{m-3}$ 이 수렴하므로

$|t| < 1$ 이고, 3 이상의 자연수 m 에 대하여

$$\sum_{m=1}^{\infty}\{f(m)\}^{m-3} = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\{f(k)\}^{k-3}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left[\{f(1)\}^{-2} + \{f(2)\}^{-1} + \sum_{k=3}^{m}\{f(k)\}^{k-3}\right]$$

$$= 4 + \frac{3}{1+t} + \frac{1}{1-t}$$

이다. 이때

$$4 + \frac{3}{1+t} + \frac{1}{1-t} < 8 \Rightarrow t(2t-1) < 0 \quad (\because |t| < 1)$$

$$\Rightarrow 0 < t < \frac{1}{2} \cdots ㉠$$

이고, $f(4) = t$ 이므로 ㉠에 의하여

$$0 < 20 \times f(4) = 20t < 10 \Rightarrow t = \frac{1}{20}, \frac{2}{20}, \cdots, \frac{9}{20} \cdots ㉡$$

이다.

따라서 ㉡에 의하여 $\frac{1+2+\cdots+9}{20} = \frac{9}{4}$ 이므로

$$\therefore p + q = 13$$

38) [정답] 4

 # 미적분 - 적분법
 # KEY POINT : 부분적분법 + 주기성 관찰 + 등비급수의 합

$$\int_0^n \frac{g'(x)f(x)}{\{g(x)\}^2}dx = -\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]_0^n + \int_0^n \frac{f'(x)}{g(x)}dx$$

$$= -\left\{\frac{f(n)}{g(n)} - \frac{f(0)}{g(0)}\right\} + \int_0^n f(2x)dx$$

$\cdots\cdots ㉠$

이때, $g(x) = \frac{f'(x)}{f(2x)}$ 이므로

$$g(x+1) = \frac{f'(x+1)}{f(2x+2)}$$

$$= \frac{2f'(x)}{4f(2x)} \quad (\because f(x+1) = 2f(x))$$

$$= \frac{f'(x)}{2f(2x)} = \frac{1}{2}g(x) \text{ 가 되어}$$

$g(n) = \frac{1}{2}g(n-1) = \frac{1}{4}g(n-2) = \cdots = \frac{1}{2^n}g(0)$이고,

$f(n) = 2f(n-1) = 4f(n-2) = \cdots = 2^nf(0)$이다.

또한, $\int_0^n f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2n} f(t)dt$ 이므로

㉠에서

$$-(2^{2n}-1) \times \frac{f(0)}{g(0)} + \frac{1}{2}\int_0^{2n} f(t)dt$$

$$=-\left(2^{2n}-1\right)+\frac{1}{2}\times\left(\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt+\cdots+\int_{2n-1}^{2n} f(t)dt\right)$$

$$=-\left(2^{2n}-1\right)+\frac{1}{2}\times\left(1+2+2^2+\cdots+2^{2n-1}\right)\times\int_0^1 f(t)dt$$

$$=-\left(2^{2n}-1\right)+\frac{1}{2}\times\frac{2^{2n}-1}{2-1}\times\int_0^1 f(t)dt$$

$$=\left(2^{2n}-1\right)\left(-1+\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt\right)$$

$$=\left(2^{2n}-1\right)\times\left(-1+\frac{4}{3}\right)$$

$=\dfrac{1}{3}\left(2^{2n}-1\right)=85$, 따라서 $2^{2n}=256$이므로

$\therefore\ n=4$

수학(공통) 정답

1	①	2	⑤	3	②	4	①	5	④
6	①	7	③	8	④	9	①	10	④
11	⑤	12	③	13	③	14	①	15	①
16	27	17	12	18	10	19	84	20	100
21	63	22	12						

확률과 통계 정답

23	③	24	②	25	⑤	26	②	27	②
28	④	29	96	30	74				

미적분 정답

23	③	24	④	25	⑤	26	②	27	③
28	④	29	13	30	4				

1) [정답] ①

수학Ⅰ - 삼각함수
KEY POINT : 삼각함수의 연산

$\sin\frac{5}{4}\pi+\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

2) [정답] ⑤

수학Ⅱ - 적분
KEY POINT : 정적분의 연산

$$\int_0^2\left(2x^3+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x\right]_0^2$$
$$=(8+1)-0$$
$$=9$$

3) [정답] ②

수학Ⅱ - 미분
KEY POINT : 다항함수의 도함수

$f'(x)=(x^2-3x+1)+(x+2)(2x-3)$이므로
$f'(2)=3$이다.

4) [정답] ①

수학Ⅰ- 수열
KEY POINT : 점화식에 대입해서 원하는 항 구하기

$a_n+a_{n+1}=2n+1$ …… ㉠
㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1+a_2=3,\ a_2=1$
㉠에 $n=2$를 대입하면 $a_2+a_3=5,\ a_3=4$
㉠에 $n=3$을 대입하면 $a_3+a_4=7,\ a_4=3$
$\therefore\ a_3-a_4=4-3=1$

5) [정답] ④

수학Ⅰ - 삼각함수
KEY POINT : 삼각함수의 정의와 최대/최소

$f(x)=\tan\frac{\pi}{2}x$의 주기는 2이고,

$-\frac{1}{3}\le x\le a$에서 함수 $f(x)$는 증가함수이다.

따라서 $f(x)$의 최솟값은 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

최댓값과 최솟값의 곱이 -1이므로

함수 $f(x)$의 최댓값은 $\tan\frac{a}{2}\pi=\sqrt{3}$이어야 한다.

$\therefore\ a=\frac{2}{3}$

6) [정답] ①

수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속
KEY POINT : 함수의 연속을 활용한 $\frac{0}{0}$꼴 극한값 연산

$(2\sqrt{x}-a)f(x)=x-4$에서 $f(x)=\frac{x-4}{2\sqrt{x}-a}$이다.

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

모든 양수 x에 대하여 $f(4)=\lim\limits_{x\to4}\frac{x-4}{2\sqrt{x}-a}$이다. (단, $x\ne\frac{a^2}{4}$)

이때, $f(4)\ne0$이고, (분자)$\to0$이므로
(분모)$\to0$에서 $4-a=0$이 되어 $a=4$이다.

$$f(4)=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{2\sqrt{x}-4}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}$$
$$=\frac{1}{2}\times(2+2)=2$$

$\therefore\ a\times f(4)=4\times2=8$

7) [정답] ③

수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수
KEY POINT : 거듭제곱근의 뜻과 성질

$f(x)=3x+4$에 대하여
$f(n)$의 네제곱근 중 실수인 것의 곱은
$\sqrt[4]{f(n)}\times(-\sqrt[4]{f(n)})=-\sqrt{f(n)}$이므로
이 값이 -5보다 크려면 $-\sqrt{f(n)}>-5$에서 $f(n)<25$이므로
$3n+4<25,\ n<7$이다.
이를 만족하는 자연수 n의 값은 $1,2,3,4,5,6$으로 6개다.

8) [정답] ④

수학Ⅰ - 수열
KEY POINT : 시그마의 공식과 간단한 성질

$$\sum_{k=1}^{7}(a_k+k)=\sum_{k=1}^{7}a_k+\frac{7\times8}{2}$$
$$=\sum_{k=1}^{7}a_k+28=40\text{이므로}$$

$\sum_{k=1}^{7} a_k = 12 \cdots\cdots$ ㉠

한편, $\sum_{k=1}^{6} (a_{8-k}+5) = 20$에서

$\sum_{k=1}^{6} a_{8-k} + 6\times 5 = 20$이므로

$\sum_{k=1}^{6} a_{8-k} = -10 \cdots\cdots$ ㉡

또한, $\sum_{k=1}^{6} a_{8-k} = a_7 + a_6 + \cdots + a_2 = \sum_{k=2}^{7} a_k$이므로

이를 ㉡에 대입하면 $\sum_{k=2}^{7} a_k = -10$이다.

따라서 ㉠−㉡에서 $a_1 = \sum_{k=1}^{7} a_k - \sum_{k=2}^{7} a_k = 22$이다.

9) [정답] ①

> **# 수학Ⅱ - 미분**
> **# KEY POINT : 접선의 방정식을 활용한 연립부등식**

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(n, f(n))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(n)(x-n)+f(n)$이다.

이 접선이 $y=-|f'(n)|(x-n)+|f(n)|$와 같으므로 $f'(n)=-|f'(n)|$이고, $f(n)=|f(n)|$이다.

즉, $f'(n)\le 0$이고 $f(n)\ge 0$이어야 한다.

$f(x)=x^3-18x^2+60x$에서

$f'(x)=3x^2-36x+60$

$=3(x^2-12x+20)$

$=3(x-2)(x-10)$이므로

$f'(n)\le 0$에서 $2\le n\le 10 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또한, $f(x)=x(x^2-18x+60)$에서

방정식 $x^2-18x+60=0$의 두 실근은

$x=9-\sqrt{21}$, $9+\sqrt{21}$이고 $4<\sqrt{21}<5$이므로

삼차부등식 $x(x^2-18x+60)\ge 0$의 해는

$0\le x\le 9-\sqrt{21}$ 또는 $x\ge 9+\sqrt{21}$이다.

$4<9-\sqrt{21}<5$이므로

이를 만족하는 자연수 n의 값은

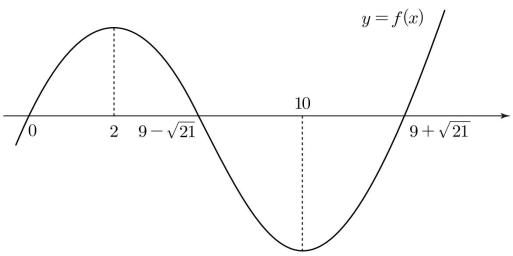
$1\le n\le 4$ 또는 $n\ge 14 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 n의 값은

$2, 3, 4$이므로 그 합은 $2+3+4=9$이다.

[참고]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



10) [정답] ④

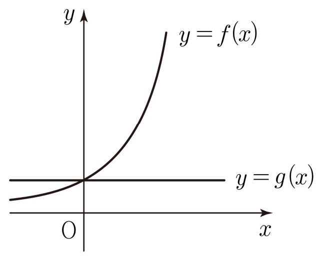
> **# 수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수**
> **# KEY POINT : 지수함수의 그래프 개형 파악하기**

$f(0)=g(0)=1$이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 모두 점 $(0, 1)$을 지난다.

ⅰ) $n=1$일 때

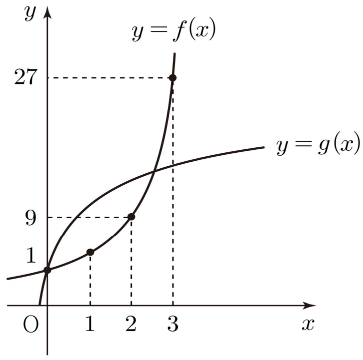
$y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 개형은 아래와 같으므로

부등식 $f(x)\le g(x)$을 만족하는 정수 x의 값은 무수히 많다.



ⅱ) $n\ge 2$일 때

$y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 개형은 아래와 같으므로



부등식 $f(x)\le g(x)$을 만족하는 정수 x의 개수가 3이 되려면 부등식의 실근 중에서 정수인 x의 값은 $0, 1, 2$이어야 한다.

이를 만족하려면 $g(2)\ge f(2)=9$, $g(3)<f(3)=27$이어야 하므로 $g(2)\ge 9$에서 $\frac{1-n}{4}+n=\frac{3n+1}{4}\ge 9$,

$3n+1\ge 36$, $3n\ge 35$이므로

$n\ge \frac{35}{3} \quad \cdots\cdots$ ㉠

또한, $g(3)<27$에서 $\frac{1-n}{8}+n=\frac{7n+1}{8}<27$,

$7n+1<216$, $7n<215$이므로

$n<\frac{215}{7} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{35}{3}\le n<\frac{215}{7}$이므로

이를 만족하는 자연수 n의 값은 $12, 13, \cdots, 30$이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $30+12=42$이다.

[참고]

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 제 2사분면에서 교점을 가지는 경우, 즉, 주어진 부등식을 만족하는 정수 x의 값이 $-2, -1, 0$이

되는 경우도 생각해 볼 수 있다.
다만 이 경우 $f(-2) \le g(-2)$, $f(-3) > g(-3)$을 만족해야 하는데 $f(-2)=\frac{1}{9}$, $g(-2)=4-3n$이므로 2보다 크거나 같은 자연수 n에 대하여 $g(-2)<0$이므로 $f(-2) \le g(-2)$를 만족하지 않는다.

11) [정답] ⑤

수학Ⅱ - 적분
KEY POINT : 움직인 거리와 위치변화량의 관계

$0 \le t \le 2$에서 $a(t)=-t^2+2t$이므로

$0 \le t \le 2$에서 $v(t)=-\frac{1}{3}t^3+t^2+m$ $(\because v(0)=m)$

$v(2)=-\frac{8}{3}+4+m=m+\frac{4}{3}$ ……㉠

이때, $t \ge 2$에서 $v(t)=(t-4)^2+k$이므로
$v(2)=4+k$ ……㉡
$v(t)$는 $t=2$에서 연속이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$m+\frac{4}{3}=4+k$, $k=m-\frac{8}{3}$이고,

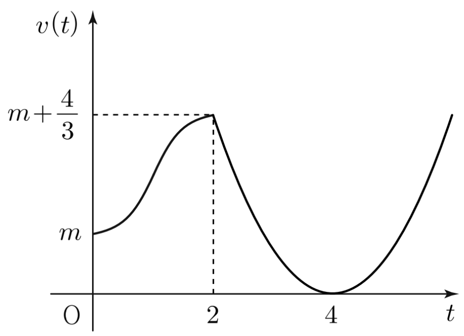
출발 후 점 P의 위치변화량과 점 P가 움직인 거리가 같도록 하려면 $v(t) \ge 0$이어야 하므로
$v(t)$의 최솟값인 $v(4)=k$의 값이 0보다 크거나 같으면 된다.

$k=m-\frac{8}{3} \ge 0$, $m \ge \frac{8}{3}$

따라서 상수 m의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

[참고]

$m=\frac{8}{3}$일 때, $v(t)$의 그래프는 다음과 같다.



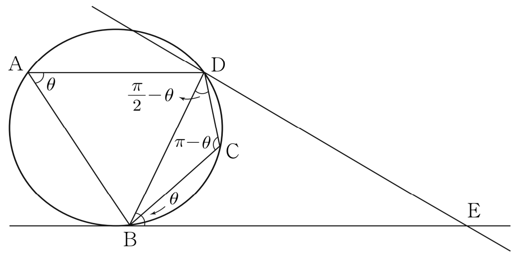
12) [정답] ③

수학Ⅰ - 삼각함수
KEY POINT : 원주각의 성질을 이용한 사인/코사인법칙

$\angle BAD+\angle BDC=\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle BAD=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\angle BDC=\frac{\pi}{2}-\theta$이고, $\angle BCD=\pi-\theta$이다.



$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\sqrt{2}$이므로 $\overline{BC}=a$라 하면 $\overline{BD}=\sqrt{2}a$이고,

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의해

$$\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\sqrt{2}a}{\sin(\pi-\theta)}=2\sqrt{3}$$

$$\frac{a}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}a}{\sin\theta}=2\sqrt{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 $\frac{a}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}a}{\sin\theta}$에서 $\tan\theta=\sqrt{2}$

따라서 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이다.

이를 ㉠에 대입하면 $a=2$이므로 $\overline{BC}=2$, $\overline{BD}=2\sqrt{2}$이다.
또한, 직선 BE가 점 B에서 원과 접하는 접선이므로
$\angle DBE=\angle BAD=\theta$이다.

이때, 삼각형 BDE의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{BE}\times\sin\theta=4\sqrt{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\overline{BE}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=4\sqrt{2}$에서 $\overline{BE}=2\sqrt{6}$이다.

따라서 삼각형 BDE에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{DE}^2=\overline{BD}^2+\overline{BE}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{BE}\times\cos\theta$$
$$=(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{6})^2-2\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$=16$$

$\therefore \overline{DE}=4$

13) [정답] ③

수학Ⅰ - 수열
KEY POINT : 등차수열의 합을 함수로 이해하기

집합 $T_{21}=\{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{21}\}$의 원소의 개수가 21이므로
S_n $(n=1, 2, 3, \cdots 21)$의 값은 모두 다르고,
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 할 때,

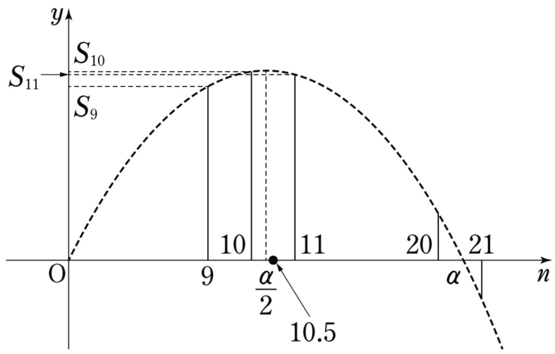
ⅰ) $d>0$이면
$S_1<0$이고 2 이상의 자연수 n에 대하여 $S_n>0$이다.
즉, $a_1<0$, $S_2>0$이고 $M_1=S_{20}$, $M_2=S_{19}$이므로
$M_1-M_2=S_{20}-S_{19}=a_{20}=1$
즉, $a_1+19d=1$이고, $S_2=2a_1+d>0$에서
$2(1-19d)+d>0$

$37d<2$ 즉, $d<\frac{2}{37}$을 만족하는

양의 정수 d는 존재하지 않는다.

ii) $d<0$일 때

조건 (가) 의하여 $S_{20}>0$, $S_{21}<0$이다. ……[참고]



이차함수로서 $S_\alpha=0$ $(20<\alpha<21)$이라 하면

$10<\frac{\alpha}{2}<10.5$이므로

$M_1=S_{10}$, $M_2=S_{11}$, $m=S_{20}$임을 알 수 있다.

$M_1-M_2=S_{10}-S_{11}=-a_{11}=1$이므로

$a_{11}=-1$이므로

또한, $M_1-m=S_{10}-S_{20}$

$$
\begin{aligned}
&=-(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20})\\
&=-\frac{10\times(a_{11}+a_{20})}{2}\\
&=-5\times(2a_{11}+9d)\\
&=-5(-2+9d) \quad (\because a_{11}=-1)\\
&=10-45d
\end{aligned}
$$

이때, $M_1-m>100$에서 $10-45d>100$,

$45d<-90$, $d<-2$이다.

$$
\begin{aligned}
M_2=S_{11}&=11\times a_6\\
&=11\times(a_{11}-5d)\\
&=11\times(-1-5d)\\
&=-11-55d
\end{aligned}
$$

의 최솟값은 $d=-3$일 때 $-11+165=154$이다.

[참고]

$S_{20}=0$이면 $S_1=S_{19}$, $S_2=S_{18}$, $\cdots$, $S_9=S_{11}$이므로

집합 T_{21}의 원소의 개수가 21일 수 없다. 따라서 $S_{20}>0$이다.

14) [정답] ①

수학Ⅱ - 적분
KEY POINT : 정적분으로 정의된 함수를 활용하여 나온 새로운 그래프 개형 파악하기

곡선 $y=x^3$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 곡선이 $y=f(x)$이므로 $f(x)=(x-a)^3$이다.

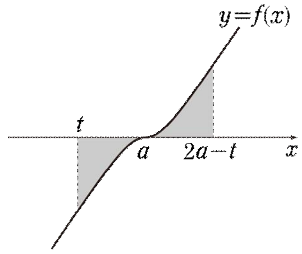
곡선 $y=x^3$은 원점에 대하여 대칭이므로

곡선 $y=f(x)$는 점 $(a,0)$에 대하여 대칭이다.

i) $t<a$일 때

$\int_t^k f(x)dx=0$을 만족시키는 실수 k는

$k=t$, $k=2a-t$이다. ……[참고]

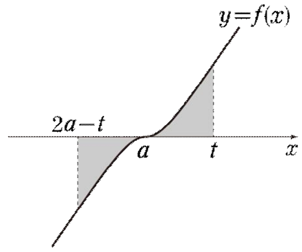


$g(t)=2a-t\,(t<a)$, $h(t)=t\,(t<a)$

ii) $t\ge a$일 때

$\int_t^k f(x)dx=0$을 만족시키는 실수 k는

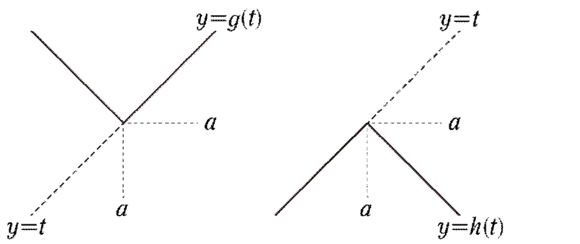
$k=t$, $k=2a-t$이다.



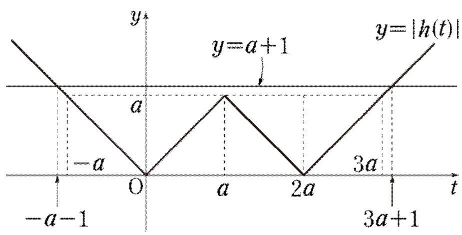
$g(t)=t\,(t\ge a)$, $h(t)=2a-t\,(t\ge a)$

i), ii)에서 $g(t)=\begin{cases}2a-t & (t<a)\\ t & (t\ge a)\end{cases}$, $h(t)=\begin{cases}t & (t<a)\\ 2a-t & (t\ge a)\end{cases}$

이므로 $y=g(t)$와 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



한편, 자연수 a에 대하여 $y=|h(t)|$의 그래프는 다음 그림과 같고, $g(a+1)=a+1$이므로



부등식 $|h(t)|\le a+1$을 만족시키는 정수 t는 $-a-1$, $-a$, $\cdots$, $3a+1$로 $(3a+1)-(-a-1)+1=4a+3$개가 있다.

따라서 $4a+3=99$에서 $a=24$이다.

[참고]

k에 대한 함수 $i(k)=\int_t^k f(x)dx\ (t<a)$에 대하여 $i(t)=0$이고

$\frac{d}{dk}i(k)=f(k)$이다. 이때 함수 $f(k)$는 $k=a$의 좌우에서만

부호가 바뀌므로 [음→양] 함수 $i(k)$는 1개의 극솟값만을 갖는다.
따라서 $i(k)=0$을 만족시키는 실수 k는 2개다.
다음과 같은 계산을 통해서도 확인할 수 있다.

$$\int_t^k (x-a)^3 dx=\left[\frac{1}{4}(x-a)^4\right]_t^k=\frac{1}{4}(k-a)^4-\frac{1}{4}(t-a)^4=0$$

$|k-a|=|t-a|$에서 $k=t$ 또는 $k=2a-t$이다.

15) [정답] ①

수학Ⅰ - 수열
KEY POINT : 점화식을 통한 수열의 결정

ⅰ) $a_1=1$인 경우

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	2	1	2^3	2^2	2	1
b_1		b_2				b_3

$b_1+b_2+b_3=11$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

ⅱ) $a_1>1$인 경우

a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{k+2}	$\cdots$	a_{3k+6}	$\cdots$	a_{7k+14}
a	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2^2}$	$\cdots$	$\frac{a}{2^{k+1}}$	$\cdots$	$\frac{a}{2^{k+1}}$	$\cdots$	$\frac{a}{2^{k+1}}$
				b_1		b_2		b_3

① $a_1=a$라 하고, $2^k<a\le 2^{k+1}$라 하자.
(단, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)

$a_k=\frac{a}{2^{k-1}}$, $a_{k+1}=\frac{a}{2^k}$, $a_{k+2}=\frac{a}{2^{k+1}}$이므로

$\frac{1}{2}<a_{k+2}\le 1$ 가 되어 $b_1=k+2$이다.

② $a_{k+3}=a\times 2^{k+2}$이고, $2^{2k+2}<a_{k+3}\le 2^{2k+3}$이므로

같은 방식으로 계산하면, $\frac{1}{2}<a_{(k+3)+(2k+3)}\le 1$

$\frac{1}{2}<a_{3k+6}\le 1$가 되어 $b_2=3k+6$이다.

③ $a_{3k+7}=a\times 2^{3k+6}$이고, $2^{4k+6}<a_{3k+7}\le 2^{4k+7}$이므로

같은 방식으로 계산하면, $\frac{1}{2}<a_{(3k+7)+(4k+7)}\le 1$

$\frac{1}{2}<a_{7k+14}\le 1$이므로 $b_3=7k+14$이다.

ⅱ)의 경우에 의하여
$b_1+b_2+b_3=(k+2)+(3k+6)+(7k+14)=11k+22=55$에서
$k=3$이다.
따라서 a_1의 값이 될 수 있는 값은 $2^3<a\le 2^4$을 만족하는 자연수이므로 이를 만족하는 자연수 a_1의 값의 합은

$9+10+11+\cdots+16=\frac{8(9+16)}{2}=100$이다.

16) [정답] 27

수학Ⅰ- 지수함수와 로그함수
KEY POINT : 지수, 로그의 연산

$\frac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c=\frac{2}{3}$이므로

$\therefore\ b^{\log_c 9}=9^{\log_c b}=9^{\frac{1}{\log_b c}}$

$=9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}$

$=3^3=27$

17) [정답] 12

수학Ⅱ - 적분
KEY POINT : 구간별로 정의된 정적분 함수

모든 자연수 n에 대하여 $\int_n^{n+2} f(x)dx=n^2$이므로

$n=3,\ 4$를 대입하면

$\int_3^5 f(x)dx=9$ $\cdots$ ㉠

$\int_4^6 f(x)dx=16$ $\cdots$ ㉡

이고, 문제의 조건에서

$\int_3^6 f(x)dx=13$ $\cdots$ ㉢

이므로 ㉠+㉡−㉢에서

$\int_4^5 f(x)dx=9+16-13=12$이다.

18) [정답] 10

수학Ⅱ - 미분
KEY POINT : 삼차함수의 극댓값과 극솟값

$f(x)=x^3-3x+5$의 양변을 x에 대하여 미분하면,
$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$이므로
$x=1$에서 극솟값 3을 갖고, $x=-1$에서 극댓값 7을 갖는다.
이때, 함수 $y=-f(x-2)+a$는 $x=3$에서 극댓값 $-3+a$를 가지므로 $7=-3+a$에서 $a=10$이다.

19) [정답] 84

수학Ⅰ - 수열
KEY POINT : 절댓값이 포함된 등비수열 결정

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

모든 자연수 n에 대하여 $0<S_n\le S_1$이므로

$n=2$일 때 $0<S_2\le S_1$

이때 $S_1=a_1=2$, $S_2=a_1+a_2=2+2r$이므로

$0<2+2r\le 2$에서 $-1<r\le 0$

$r\ne 0$이므로 $-1<r<0$ …… ㉠

또한 어떤 자연수 m에 대하여

$|a_m|+|a_{m+2}|=5\times\left|\frac{a_4}{a_3}\right|^m$ 이 성립하므로

$|2r^{m-1}|+|2r^{m+1}|=5|r|^m$

$2|r|^{m-1}+2|r|^{m+1}=5|r|^m$

양변을 $|r|^{m-1}$으로 나누면

$2+2|r|^2=5|r|$

$2|r|^2-5|r|+2=0$

$(2|r|-1)(|r|-2)=0$

$|r|=\frac{1}{2}$ 또는 $|r|=2$

㉠에 의하여 $r=-\frac{1}{2}$

따라서

$$S_6=\frac{2\times\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}\times\frac{63}{64}=\frac{21}{16}$$

$\therefore\ 64\times S_6=84$

20) [정답] 100

\# 수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속
\# KEY POINT : 함수의 극한을 활용하여 함수 결정

ⅰ) $n=2$이면 분모의 식이 $(x-2)^2$이므로
조건을 만족시키기 위해서는
$f(x)-x^2+ax=(x-2)^2(x+c)$ (단, c는 상수)에서
$f(x)=(x-2)^2(x+c)+x^2-ax$ … ㉠

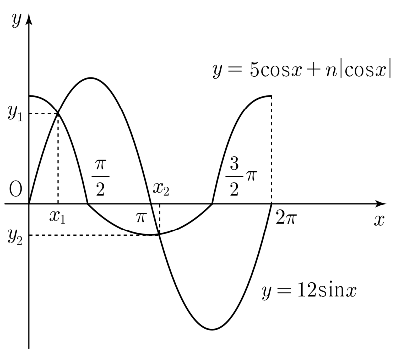
ⅱ) $n=3$이면 분자의 다항식이 이차식이므로,
조건을 만족시키기 위해서는
$f(x)-x^3+ax^2=b(x-1)(x-3)$ (단, b는 상수)에서
$f(x)=x^3-ax^2+b(x-1)(x-3)$ … ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 모든 실수 x에 대하여
$(x-2)^2(x+c)+x^2-ax=x^3-ax^2+b(x-1)(x-3)$ … ㉢
이때, ㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면 $1+c+1-a=1-a$에서
$c=-1$ … ㉣
또한 ㉢의 양변에 $x=3$을 대입하면 $c+3+9-3a=27-9a$에서
$a=\frac{8}{3}$ … ㉤
㉣, ㉤을 ㉠에 대입하면
$f(x)=(x-2)^2(x-1)+x^2-\frac{8}{3}x$이므로
$\therefore\ f(6)=100$

21) [정답] 63

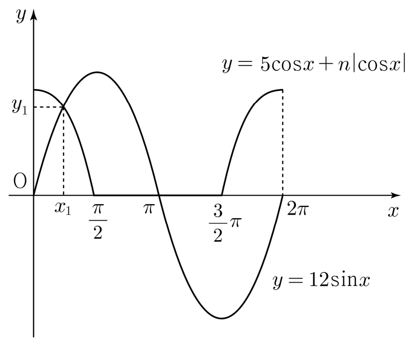
\# 수학Ⅰ - 삼각함수
\# KEY POINT : 삼각함수의 그래프

ⅰ) $n<5$일 때



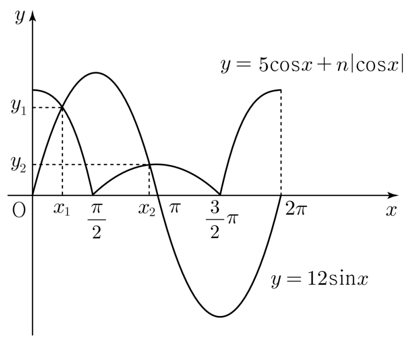
$x_1<\frac{\pi}{2}$, $x_2>\pi$이므로 $x_2-x_1>\frac{\pi}{2}$이지만,
$y_1>0$, $y_2<0$이므로 $y_1y_2<0$이다.

ⅱ) $n=5$일 때

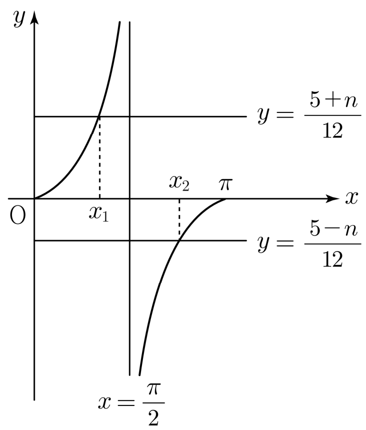


$y_2=0$이므로 $y_1y_2=0$이다.

ⅲ) $n>5$일 때



$y_1y_2>0$를 만족한다.
점 (x_1, y_1)은 두 곡선 $y=(5+n)\cos x$와 $y=12\sin x$의 교점이고, 점 (x_2, y_2)는 두 곡선 $y=(5-n)\cos x$와 $y=12\sin x$의 교점인데, 두 교점에서 $\cos x\neq 0$이므로
$(5+n)\cos x_1=12\sin x_1$에서 $\tan x_1=\frac{5+n}{12}$이고,
$(5-n)\cos x_2=12\sin x_2$에서 $\tan x_2=\frac{5-n}{12}$이다.
이 상황을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



$x_2-x_1>\frac{\pi}{2}$일 때, $x_2>\frac{\pi}{2}+x_1$이고,

$0<x_1<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<x_2<\pi$에서 $\tan x_1>0$, $\tan x_2<0$이므로

$\tan x_2>\tan\left(\frac{\pi}{2}+x_1\right)$이다.

양변에 $\tan x_1$을 곱하면

$\tan x_1\times\tan x_2>\tan x_1\times\tan\left(\frac{\pi}{2}+x_1\right)$

이때, $\tan x_1\times\tan\left(\frac{\pi}{2}+x_1\right)=\tan x_1\times\left(-\frac{1}{\tan x_1}\right)=-1$이므로

$\tan x_1\times\tan x_2>-1$이 성립한다.

즉, $\frac{5+n}{12}\times\frac{5-n}{12}>-1$, $25-n^2>-144$에서

$n^2<169$이므로 $n<13$이다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 주어진 조건을 만족하는
자연수 n의 범위는 $5<n<13$이고,
$n=6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12$이므로 그 합은
$6+7+8+9+10+11+12=63$이다.

22) [정답] 12

수학Ⅱ - 미분
KEY POINT : 구간별로 정의된 함수

$\{h(x)-f(x)\}\{h(x)-g(x)\}=0$이므로
$h(x)=f(x)$ 또는 $h(x)=x^2-2x+k$이다.
또한, 함수 $h(x)$가 연속이고, 조건 (가)에 의하여
방정식 $f(x)=g(x)$의 실근이 0과 a뿐이므로
함수 $h(x)$는
각 구간 $(-\infty,0)$, $(0,a)$, (a,∞)에서 $f(x)$ 또는 $g(x)$이다.
이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{h(-x)}=\infty$이므로
$x<0$에서 $h(x)=g(x)$이고, $x>a$에서 $h(x)=f(x)$이다.
이때, 조건 (나)의 $\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-2}{x}=3$에서 (분모)$\to0$이므로
$h(0)=2$고 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 연속이므로
$g(0)=2$이므로 $k=2$이다.
또한, 조건 (나)에서
$\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=3$이므로
함수 $h(x)$의 $x=0$에서의 우미분계수는 3이다.
이때, $g'(x)=2x-2$에서 $g'(0)=-2\neq3$이므로
구간 $(0,a)$에서 $h(x)=f(x)$이다.
즉, $f'(0)=3$이고 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 연속이므로
$f(0)=h(0)=2$이다.
따라서 $f(x)=x^3+px^2+3x+2$라 하면 (단, p는 상수)
함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 $x=a$에서 접해야 한다.
즉, 방정식 $f(x)=g(x)$는 $x=a$를 중근으로 가진다.
방정식 $x^3+px^2+3x+2=x^2-2x+2$에서
$x^3+(p-1)x^2+5x=0$
$x\{x^2+(p-1)x+5\}=0$
$p-1=-2\sqrt{5}$, $a=\sqrt{5}$이므로
$\therefore f(a)=g(\sqrt{5})$
$=5-2\sqrt{5}+2$
$=7-2\sqrt{5}$이므로
$m+n=7+5=12$

확률과 통계

23) [정답] ③

확률과 통계 - 통계
KEY POINT : 이항분포의 평균

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{3}{4}=36$에서 $n=48$이다.

24) [정답] ②

확률과 통계 - 확률
KEY POINT : 확률의 배반사건

두 사건 A^C와 B는 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=0$이다.
따라서 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$이다.
$\therefore \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$
$=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$

25) [정답] ⑤

확률과 통계 - 경우의 수
KEY POINT : 같은 것이 있는 순열을 이용한 나열

ⅰ) 양 끝에 흰 공이 위치하는 경우
남은 흰 공 2개, 빨간 공 3개, 검은 공 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{7!}{2!3!2!}=210$

ⅱ) 양 끝에 빨간 공이 위치하는 경우
남은 흰 공 4개, 빨간 공 1개, 검은 공 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{7!}{4!2!}=105$

ⅲ) 양 끝에 검은 공이 위치하는 경우
남은 흰 공 4개, 빨간 공 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{7!}{4!3!}=35$

ⅰ)~ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$210+105+35=350$

26) [정답] ②

확률과 통계 - 확률
KEY POINT : 두 사건의 독립

주머니에 들어있는 카드는 총 $5n+10$장이다.
이 중에서 홀수가 적힌 카드는
$(n+4)+(n+2)+n=3n+6$장이고,
3의 배수가 적힌 카드는
$(n+4)+(n+1)=2n+5$장이다.
3의 배수이면서 홀수인 숫자는 3이므로

3이 적힌 카드는 $n+4$장이다.
두 사건이 서로 독립이려면
$\dfrac{2n+5}{5n+10}\times\dfrac{3n+6}{5n+10}=\dfrac{n+4}{5n+10}$이 성립해야 한다.
$\dfrac{3}{5}(2n+5)=n+4,\ 6n+15=5n+20$
$\therefore\ n=5$

27) [정답] ②

 # 확률과 통계 - 통계
 # KEY POINT : 모평균의 추정

모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은
$\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}$
$\overline{x_1}-0.49\sigma\le m\le\overline{x_1}+0.49\sigma$
$\overline{x_1}-0.49\sigma=50.36,\ \overline{x_1}+0.49\sigma=a$ ……㉠
모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은
$\overline{x_2}-2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{36}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{36}}$
$\overline{x_2}-0.43\sigma=b,\ \overline{x_2}+0.43\sigma=65.49$ ……㉡
㉠, ㉡에서
$\left(\overline{x_2}+0.43\sigma\right)-\left(\overline{x_1}-0.49\sigma\right)=65.49-50.36$
$\overline{x_2}-\overline{x_1}+0.92\sigma=15.13$
$0.92\sigma=15.13-9.61=5.52$
즉, $\sigma=6$
따라서
$\sigma\times(b-a)=6\times\left\{\left(\overline{x_2}-0.43\sigma\right)-\left(\overline{x_1}+0.49\sigma\right)\right\}$
$=6\times\left\{\left(\overline{x_2}-\overline{x_1}\right)-0.92\sigma\right\}$
$=6\times(9.61-5.52)=24.54$

28) [정답] ④

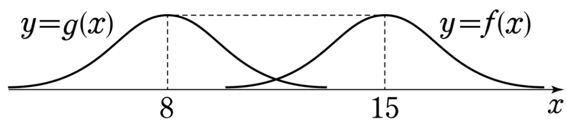
 # 확률과 통계 - 경우의 수
 # KEY POINT : 원순열

ⅰ) $1,\ 3$이 적힌 검은 공 중에서 하나만 홀수가 적힌 흰색 공과 같은 바구니에 담기는 경우
$1,\ 3$이 적힌 검은 공 중에서 하나를 선택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$
$1,\ 3,\ 5$가 적힌 흰 공 중에서 하나를 택하여 홀수가 적힌 검은 공과 같은 바구니에 담는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$
$2,\ 4,\ 6$이 적힌 검은 공 중에서 하나를 택하여 홀수가 적힌 검은 공과 같은 바구니에 담는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$
남은 흰 공 4개를 빈 1개의 바구니와 검은 공이 각각 1개씩 들어있는 바구니에 각각 2개, 1개, 1개씩 집어넣는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2\times2!$이고, 그중에서 홀수가 적힌 흰 공 2개가 비어있는 2개의 바구니에 들어가는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times\left({}_4\mathrm{C}_2\times2!-2!\right)=180$
ⅱ) $1,\ 3$이 적힌 검은 공 모두가 짝수가 적힌 흰색 공과 같은 바구니에 담기는 경우
짝수가 적힌 흰색 공을 하나씩 $1,\ 3$이 적힌 흰 공이 있는 바구니에 담는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2=6$
이때, 홀수가 적힌 흰색 공 3개 중 2개를 비어있는 바구니 1개에 담는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$
남아있는 흰 공 2개를 바구니에 남는 경우의 수는 $2!$이므로 구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{C}_2\times2!=36$
ⅰ), ⅱ)에 의하여 같은 종류의 바구니 5개에 공 10개를 나누어 담는 경우의 수는 $180+36=216$이고, 이 5개의 바구니를 원형으로 나열하는 경우의 수는 $(5-1)!=4!$이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $216\times4!$이므로
$\therefore\ n=216$

29) [정답] 96

 # 확률과 통계 - 통계
 # KEY POINT : 정규분포를 이용한 확률 계산

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(15)$이므로 확률변수 X의 평균은 15이다.
조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+13)=g(10-x)$이므로 $10-x=t$라 하면 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=f(23-t)$이다. 이때, $f(23-t)=f(-(t-23))$이므로 함수 $y=f(23-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 23만큼 평행이동한 것이므로
확률변수 Y의 평균은 $-15+23=8$이고
확률변수 Y의 표준편차는 X의 표준편차와 같다.



$\mathrm{P}(Y\ge\sigma)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{\sigma-8}{\sigma}\right)$
$=\mathrm{P}\left(Z\ge1-\dfrac{8}{\sigma}\right)$
이므로, $\mathrm{P}(Y\ge\sigma)$의 값은 σ가 최소일 때 최댓값 0.9332를 갖고, σ가 최대일 때 최솟값 0.3085을 갖는다.
$0.3085\le\mathrm{P}\left(Z\ge1-\dfrac{8}{\sigma}\right)\le0.9332$이므로
$\mathrm{P}\left(Z\ge1-\dfrac{8}{\sigma}\right)\le0.9332$에서
$1-\dfrac{8}{\sigma}\ge-1.5,\ \dfrac{8}{\sigma}\le2.5$이므로 $\sigma\ge\dfrac{16}{5}$ ……㉠
$\mathrm{P}\left(Z\ge1-\dfrac{8}{\sigma}\right)\ge0.3085$에서
$1-\dfrac{8}{\sigma}\le0.5,\ \dfrac{1}{2}\le\dfrac{8}{\sigma}$이므로 $\sigma\le16$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $\dfrac{16}{5}\le\sigma\le16$
$\therefore\ 5\times(M+m)=5\times\left(\dfrac{16}{5}+16\right)=96$

30) [정답] 74

 # 확률과 통계 - 확률
 # KEY POINT : 중복조합을 활용한 함수의 개수

조건 (가)를 만족하는 함수 f의 개수 ${}_5\mathrm{H}_3 \times {}_5\mathrm{H}_3 = 35^2 = 1225$이고

여기에서 $f(5)=f(6)$를 만족하는 함수 f의 개수를 제외하면 $f(5)<f(6)$ 또는 $f(5)>f(6)$를 만족하는 함수만 남게 되는데 두 함수의 개수는 동일하므로 다음과 같이 함수의 개수를 구할 수 있다.

$f(5)=f(6)$를 만족하는 함수 f의 개수는

다음과 같이 계산이 가능하다.

$f(5)=f(6)=1$인 경우 ${}_1\mathrm{H}_2 \times {}_1\mathrm{H}_2 = 1$

$f(5)=f(6)=2$인 경우 ${}_2\mathrm{H}_2 \times {}_2\mathrm{H}_2 = 9$

$f(5)=f(6)=3$인 경우 ${}_3\mathrm{H}_2 \times {}_3\mathrm{H}_2 = 36$

$f(5)=f(6)=4$인 경우 ${}_4\mathrm{H}_2 \times {}_4\mathrm{H}_2 = 100$

$f(5)=f(6)=5$인 경우 ${}_5\mathrm{H}_2 \times {}_5\mathrm{H}_2 = 225$

를 제외하면

$1225-(1+9+36+100+225)=854$이고

이는 $f(5)<f(6)$ 또는 $f(5)>f(6)$를 만족하는 함수의 개수의 합이므로 $f(5)<f(6)$를 만족하는 함수의 개수는 $\dfrac{854}{2}=427$이다.

이 중 $f(1)>f(2)$을 만족하는 함수 f의 개수는 다음과 같이 $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 설정해서 구할 수 있다.

($\because$ $f(1) \le f(5)$, $f(2) \le f(6)$)

ⅰ) $f(5)=1$인 경우 $f(1)=1$이므로 $f(1)>f(2)$을 만족하는 }

함수 f는 존재하지 않는다.

ⅱ) $f(5)=2$인 경우 $f(1)=2$이므로 ($\because$ $f(1)=1$이면 조건을 만족하는 함수가 존재하지 않는다.)

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$
2	1	2	1, 2, 3	2	3
			1, 2, 3, 4		4
			1, 2, 3, 4, 5		5

위 표와 같이 함숫값이 결정될 수 있으므로

조건을 만족하는 함수 f의 개수는 $3+4+5=12$이다.

ⅲ) $f(5)=3$인 경우

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$
2	1	2, 3	1, 2, 3, 4	3	4
3	1	3	1, 2, 3, 4		
	2		2, 3, 4		
2	1	2, 3	1, 2, 3, 4, 5		5
3	1	3	1, 2, 3, 4, 5		
	2		2, 3, 4, 5		

위 표와 같이 함숫값이 결정될 수 있으므로

조건을 만족하는 함수 f의 개수는

$2\times4+(4+3)+2\times5+(5+4)=34$이다.

ⅳ) $f(5)=4$인 경우

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$
2	1	2, 3, 4	1, 2, 3, 4, 5	4	5
3	1	3, 4	1, 2, 3, 4, 5		
	2		2, 3, 4, 5		
4	1	4	1, 2, 3, 4, 5		
	2		2, 3, 4, 5		
	3		3, 4, 5		

위 표와 같이 함숫값이 결정될 수 있으므로

조건을 만족하는 함수 f의 개수는

$3\times5+2\times(5+4)+(5+4+3)=45$이다.

ⅰ)~ⅳ)에서 구하는 함수 f의 개수는 $12+34+45=91$

그러므로 구하는 확률은 $\dfrac{91}{427}=\dfrac{13}{61}$

$\therefore$ $p+q=61+13=74$

미적분

23) [정답] ③

 # 미적분 - 수열의 극한
 # KEY POINT : 수열의 극한값 계산

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{4+\frac{3}{n}}-2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n\times\frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}$$

$$= \frac{3}{4}$$

24) [정답] ④

 # 미적분 - 미분법
 # KEY POINT : 합성함수의 미분법

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\frac{1}{3}$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고

극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to2}\{f(x)-2\}=0$에서 $f(2)=2$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=f'(2)=\frac{1}{3}$$

함수 $g(x)=(f\circ f)(x)+f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f'(f(x))\times f'(x)+f'(x)$이고, $x=2$를 대입하면

$\therefore$ $g'(2)=f'(f(2))\times f'(2)+f'(2)$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

25) [정답] ⑤

미적분 - 적분법
KEY POINT : 입체도형의 부피

단면인 정사각형의 한 변의 길이가 e^x+x이므로

넓이는 $(e^x+x)^2$이다. 따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\therefore \int_0^1 (e^x+x)^2 dx = \int_0^1 (e^{2x}+2xe^x+x^2)dx$$
$$=\left[\frac{e^{2x}}{2}+2(xe^x-e^x)+\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$=\left\{\frac{e^2}{2}+2(e-e)+\frac{1}{3}\right\}-\left\{\frac{1}{2}+2(0-1)\right\}$$
$$=\frac{e^2}{2}+\frac{11}{6}$$

26) [정답] ②

미적분 - 미분법
KEY POINT : 매개변수 미분법

$x=t^2-4t+4\ln t$, $y=t^2+3$에서

$\frac{dx}{dt}=2t-4+\frac{4}{t}$, $\frac{dy}{dt}=2t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{2t-4+\frac{4}{t}}=\frac{t^2}{t^2-2t+2}\text{이다.}$$

$t>0$에서 $\frac{t^2}{t^2-2t+2}$의 최댓값을 찾아야 하므로

$f(t)=\frac{t^2}{t^2-2t+2}$ $(t>0)$라 하고, 양변을 t에 대하여 미분하면

$$f'(t)=\frac{2t(t^2-2t+2)-t^2(2t-2)}{(t^2-2t+2)^2}$$
$$=\frac{-2t^2+4t}{(t^2-2t+2)^2}$$
$$=\frac{-2t(t-2)}{(t^2-2t+2)^2}$$

따라서 $t=2$에서 극댓값이자 최댓값을 갖는다.

$(\because\ t^2-2t+2>0)$

$$\therefore\ f(2)=\frac{2^2}{2^2-2\times2+2}=2$$

27) [정답] ③

미적분 - 적분법
KEY POINT : 치환적분법

주어진 조건에서 $\angle\mathrm{BAC}=\theta$, $\angle\mathrm{CBD}=\theta$이고

$\angle\mathrm{BCA}=\angle\mathrm{BCD}$이므로

두 삼각형 ABC와 BCD는 서로 닮음이다.

따라서 삼각형 BCD는

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BD}}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=1$이고,

$\overline{\mathrm{CD}}=2\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow \therefore f(\theta)=2\sin\frac{\theta}{2}$ ……㉠

이때, $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$이므로 $\angle\mathrm{EBD}=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta$이고,

삼각형 EBD에서 $\angle\mathrm{BED}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$

따라서 삼각형 EBD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\overline{\mathrm{BE}}}{\sin2\theta} \Rightarrow \therefore g(\theta)=\frac{\sin2\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}\quad\text{……㉡}$$

㉠, ㉡에서 $\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\frac{\sin2\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$

$$=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$$

이므로 구하고자 하는 값은 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}8\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta$이다.

$\cos\theta=t$로 치환하면 $-\sin\theta d\theta=dt$이고,

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}8\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}8t^3(-dt)$$
$$=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}8t^3dt$$
$$=\left[2t^4\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=2\times\left(\frac{9}{16}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{5}{8}$$

28) [정답] ④

미적분 - 미분법
KEY POINT : 역함수의 미분법

$f(x)=ax^2+b$ $(a\neq0)$으로 놓으면 조건 (가)에 의하여

$g(2a^2x^3+2abx)=2ax \Leftrightarrow \frac{1}{2a}g(2a^2x^3+2abx)=x$이다.

이때, $g_1(x)=\frac{1}{2a}\times g(x)=\frac{1}{f'(1)}\times g(x)$, $h(x)=2a^2x^3+2abx$

로 놓으면 $g_1(h(x))=x$이고, $g_1(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분

가능하므로 $(\because\ g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능$)$

두 함수 $g_1(x)$, $h(x)$는 서로 역함수 관계이다.

또한 모든 실수 x에 대하여

$h'(x)=6a^2x^2+2ab>0 \Rightarrow ab>0$ ⋯ ㉠

이어야 한다.

한편, 조건 (나)에 의하여

$g_1(x)=h(x) \Leftrightarrow g(x)=f'(1)\times f(x)f'(x)$

의 서로 다른 모든 실근이 -2, 0, 2이고,

$h(x)$가 증가함수이므로

$h(2)=2$, $h(0)=0$, $h(-2)=-2$ ⋯ ㉡

이다. 이때 ㉡에 의하여

$8a^2+2ab=1$ ⋯ ㉢

이고,

$$g'(0)=2a\times g_1{}'(0)=2a\times\frac{1}{h'(0)}=1 \Leftrightarrow b=1$$

이다. 따라서 $b=1$을 ㉢에 대입하면

$$8a^2+2a-1=0 \Leftrightarrow (4a-1)(2a+1)=0 \Rightarrow a=\frac{1}{4}\ (\because ㉠)$$

이고, $h(x)=\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{2}x$이다.

$$\therefore\ g'\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{h'(1)}=\frac{4}{7}$$

29) [정답] 13

 # 미적분 - 수열의 극한
 # KEY POINT : 등비수열로 정의된 함수

$m<4-m$ $(m=1)$인 경우

$$f(m)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{t+3^n}{1+2\times3^n}\right)=\frac{1}{2}$$

이고, $m=4-m$ $(m=2)$인 경우

$$f(m)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(t+1)\times2^n}{3\times2^n}\right\}=\frac{t+1}{3}$$

이다. 같은 방법으로, $m>4-m$ $(m\geq3)$인 경우

$$f(m)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{t\times m^n+(4-m)^n}{m^n+2\times(4-m)^n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{t+\left(\frac{4-m}{m}\right)^n}{1+2\times\left(\frac{4-m}{m}\right)^n}\right\}$$

이고, $\left|\frac{4-m}{m}\right|<1$이므로 $f(m)=t$이다.

따라서 조건에 의하여 급수 $\sum_{m=1}^{\infty}\{f(m)\}^{m-3}$이 수렴하므로

$|t|<1$이고, 3 이상의 자연수 m에 대하여

$$\sum_{m=1}^{\infty}\{f(m)\}^{m-3}=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\{f(k)\}^{k-3}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left[\{f(1)\}^{-2}+\{f(2)\}^{-1}+\sum_{k=3}^{m}\{f(k)\}^{k-3}\right]$$

$$=4+\frac{3}{1+t}+\frac{1}{1-t}$$

이다. 이때

$$4+\frac{3}{1+t}+\frac{1}{1-t}<8 \Rightarrow t(2t-1)<0\ (\because\ |t|<1)$$

$$\Rightarrow 0<t<\frac{1}{2}\ \cdots ㉠$$

이고, $f(4)=t$이므로 ㉠에 의하여

$$0<20\times f(4)=20t<10 \Rightarrow t=\frac{1}{20},\ \frac{2}{20},\ \cdots,\ \frac{9}{20}\ \cdots ㉡$$

이다.

따라서 ㉡에 의하여 $\frac{1+2+\cdots+9}{20}=\frac{9}{4}$이므로

$\therefore\ p+q=13$

30) [정답] 4

 # 미적분 - 적분법
 # KEY POINT : 구간별로 정의된 함수의 부분적분

$$\int_0^n\frac{g'(x)f(x)}{\{g(x)\}^2}dx=-\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]_0^n+\int_0^n\frac{f'(x)}{g(x)}dx$$

$$=-\left\{\frac{f(n)}{g(n)}-\frac{f(0)}{g(0)}\right\}+\int_0^n f(2x)dx$$

……㉠

이때, $g(x)=\frac{f'(x)}{f(2x)}$ 이므로

$$g(x+1)=\frac{f'(x+1)}{f(2x+2)}$$

$$=\frac{2f'(x)}{4f(2x)}\ (\because\ f(x+1)=2f(x))$$

$$=\frac{f'(x)}{2f(2x)}=\frac{1}{2}g(x)$$ 가 되어

$g(n)=\frac{1}{2}g(n-1)=\frac{1}{4}g(n-2)=\cdots=\frac{1}{2^n}g(0)$이고,

$f(n)=2f(n-1)=4f(n-2)=\cdots=2^nf(0)$이다.

또한, $\int_0^n f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{2n}f(t)dt$ 이므로

㉠에서

$$-(2^{2n}-1)\times\frac{f(0)}{g(0)}+\frac{1}{2}\int_0^{2n}f(t)dt$$

$$=-(2^{2n}-1)+\frac{1}{2}\times\left(\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt+\cdots+\int_{2n-1}^{2n}f(t)dt\right)$$

$$=-(2^{2n}-1)+\frac{1}{2}\times(1+2+2^2+\cdots+2^{2n-1})\times\int_0^1 f(t)dt$$

$$=-(2^{2n}-1)+\frac{1}{2}\times\frac{2^{2n}-1}{2-1}\times\int_0^1 f(t)dt$$

$$=(2^{2n}-1)\left(-1+\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt\right)$$

$$=(2^{2n}-1)\times\left(-1+\frac{4}{3}\right)$$

$=\frac{1}{3}(2^{2n}-1)=85$, 따라서 $2^{2n}=256$이므로

$\therefore\ n=4$