제 2 교시

2025학년도 대학수학능력시험 대비 응애 모의고사 2회 문제지

수학 영역

손풀이!

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

나의 빛이 되어 내 앞길을 밝혀 줘

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{2(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$

$= \lim_{x\to1} 2(x+1) = 4.$

2. $a>1$인 실수 a에 대하여 $\log_a a^3$을 간단히 한 것은? [2점]

① 1 ② a ③ 2 ④ $2a$ ⑤ 3

$\log_a a^3 = 3\log_a a = 3.$

3. 함수 $f(x)=x^3+x-1$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$f'(x)=3x^2+1.$

$f'(2)=12+1=13.$

4. $0<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{2}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\sqrt{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\sqrt{5}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta=\frac{2}{3}.$

$\therefore 0<\theta<\frac{\pi}{2}.$ $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}.$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$

X

5. $\int_{-1}^{1}(x^2+|x|)dx$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$\int_{-1}^{1}(x^2+|x|)dx = 2\int_0^1(x^2+|x|)dx$

$= 2\int_0^1(x^2+x)dx$ ($\because$ $0\le x\le 1$에서 $|x|=x$)

$= 2\cdot\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1$

$= 2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3}$

6. $a_1=1$, $a_2=3$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}=4a_n$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{7}a_n$의 값은? [3점]

① 148 ② 150 ③ 152 ④ 154 ⑤ 156

$a_1=1$. $a_3=4\cdot 1=4$. $a_5=4\cdot 4=16$. $a_7=4\cdot 16=64$.

$a_2=3$. $a_4=4\cdot 3=12$. $a_6=4\cdot 12=48$.

$\therefore \sum_{n=1}^{7}a_n=(1+4+16+64)+(3+12+48)$

$=148$.

7. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=x^4+ax+b$가 $x=1$에서 최솟값 2를 가질 때, $a\times b$의 값은? [3점]

① -24 ② -23 ③ -22 ④ -21 ⑤ -20

$f(1)=1+a+b=2$. $a+b=1$.

$f'(x)=4x^3+a$. $f'(1)=4+a=0$.

$\therefore a=-4$. $b=5$.

$a\times b=-20$.

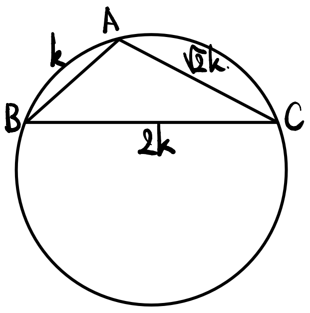
8. 넓이가 $\frac{8}{7}\pi$인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다.

$$\frac{2}{\sin(\angle BAC)} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\angle ABC)} = \frac{1}{\sin(\angle BCA)} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}.$$

일 때, 선분 CA의 길이는? [3점]

① $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{11}}{2}$

$\overline{BC}=2k,\ \overline{CA}=\sqrt{2}k,\ \overline{AB}=k.$



$\cos B = \frac{1+4-2}{2\cdot1\cdot2} = \frac{3}{4}.\quad \sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}.$

$\frac{\overline{CA}}{\sin B} = \frac{4}{\sqrt{7}}\cdot\sqrt{2}k = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}.\quad k=1.\quad \therefore \overline{CA}=\sqrt{2}.$

9. 실수 a에 대하여 x에 대한 방정식 $a(x+1)^2 = x$의 서로 다른 실근의 개수를 $f(a)$라 하자. 함수 $f(a)$가 $a=\alpha$에서 불연속인 모든 α의 값의 합은? [4점]

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

$a=0;\ \alpha=0.\ f(0)=1.$

$a\neq0;\ a\alpha^2+(2a-1)\alpha+a=0.$ 이차방정식. (*)

(*)의 판별식 $D=(2a-1)^2-4\cdot a\cdot a = -4a+1.$

$\begin{cases} <0. & a>\frac{1}{4} & \text{(*) 실근 ×} \\ =0. & a=\frac{1}{4} & \text{(*) 실근 1개.} \\ >0. & a<0 \text{ or } 0<a<\frac{1}{4} & \text{(*) 실근 2개.} \end{cases}$

$\therefore f(a) = \begin{cases} 2 & (a<0 \text{ or } 0<a<\frac{1}{4}) \\ 1 & (a=0 \text{ or } a=\frac{1}{4}) \\ 0 & (a>\frac{1}{4}). \end{cases}$

$\alpha=0,\ \frac{1}{4}.$ 합 $\frac{1}{4}.$

10. 함수 $f(x)=\sin(ax)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 양수 a의 최솟값을 a_n이라 할 때, a_2+a_7의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4\pi)=f(x)$이다.

(나) 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $\left[0, \frac{2}{n}\pi\right]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ 3 ④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

f 주기 $\frac{2\pi}{a} \in \left\{\frac{4\pi}{k}\,\middle|\,k는\ 자연수\right\}.$

$\therefore \frac{2\pi}{a} = \frac{4\pi}{1},\ \frac{4\pi}{2},\ \frac{4\pi}{3},\ \cdots$

$a=\frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \cdots$

$x\geq0$에서 f 최대. $x=\frac{\pi}{2a},\ \frac{5\pi}{2a},\ \frac{9\pi}{2a},\ \cdots$

$\frac{\pi}{2a}\leq\frac{2}{n}\pi.\quad \frac{5\pi}{2a}\leq\frac{2}{n}\pi.\quad \frac{9\pi}{2a}\leq\frac{2}{n}\pi.\ \cdots$

$a\geq\frac{n}{4}.\quad a\geq\frac{5}{4}n.\quad a\geq\frac{9}{4}n.\ \cdots$

최소. $a\geq\frac{n}{4}.$

$a_2\geq\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.\quad a_2=\frac{1}{2}.$

$a_7\geq\frac{7}{4}.\quad a_7=2.$

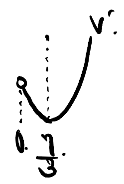
$\therefore a_2+a_7=\frac{5}{2}.$

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도는 $v(t)=t^3-7t^2+15t-9$이다. 시각 $t=a$에서 점 P의 가속도가 최소가 될 때, 시각 $t=0$에서 $t=a+\frac{2}{3}$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① $\frac{29}{6}$ ② $\frac{59}{12}$ ③ 5 ④ $\frac{61}{12}$ ⑤ $\frac{31}{6}$

$(가속도) = v'(t) = 3t^2-14t+15$

$= 3\left(t-\frac{7}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$



$t=\frac{7}{3}$에서 가속도 최소. $\therefore a=\frac{7}{3}$

$\therefore (거리) = \int_0^3 |t^3-7t^2+15t-9|\,dt$

$v(t)=0 \ldots$

$v(1)=1-7+15-9=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -7 & 15 & -9 \\ & & 1 & -6 & 9 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array}$$

$\therefore v(t)=(t-1)(t-3)^2$

$= \int_0^3 |(t-1)(t-3)^2|\,dt$

$= \int_0^1 (-t^3+7t^2-15t+9)\,dt + \int_1^3 (t-1)(t-3)^2\,dt$

$= \left(-\frac{1}{4}+\frac{7}{3}-\frac{15}{2}+9\right)+\frac{1}{12}\cdot 2^4$

$= \frac{59}{12}$

12. 함수

$$f(x)=\begin{cases} (\sqrt{2})^{x+a}+a & (x<0) \\ (\sqrt{2})^{a-x}-3a & (x \geq 0) \end{cases}$$

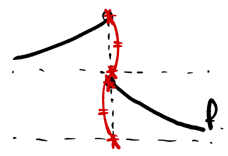
가 다음 조건을 만족시키도록 하는 자연수 a의 개수는? [4점]

> 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수인 것의 개수는 5 이상 110 이하이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$y=(\sqrt{2})^{x+a}+a\ (x<0)$ $(치역)=\{y \mid a<y<(\sqrt{2})^a+a\}$

$y=(\sqrt{2})^{a-x}-3a\ (x \geq 0)$ $(치역)=\{y \mid -3a<y \leq (\sqrt{2})^a-3a\}$



i) 서로의 치역이 겹치지 않을 때

i $(\sqrt{2})^a-3a \leq a$. $(\sqrt{2})^a \leq 4a$

$(\sqrt{2})^{0-4}=\frac{1}{4}>0$

$(\sqrt{2})^{1-4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}<1$

$(\sqrt{2})^{2-4}=\frac{1}{2}<2$

$\vdots$

$(\sqrt{2})^{10-4}=8<10$

$(\sqrt{2})^{11-4}=8\sqrt{2}=\sqrt{128}>11$

$(\sqrt{2})^{12-4}=16>12$

$\vdots$

$\therefore a=1, 2, \cdots, 10$

a가 짝수

$\{f(a) \mid f(a)는\ 정수\}$

$=\{-3a+1, \cdots, (\sqrt{2})^a-3a\} \cup \{a+1, \cdots, (\sqrt{2})^a+a-1\}$

(f의 치역 중 정수 개수)

$=\{((\sqrt{2})^a-3a)-(-3a)\}+\{((\sqrt{2})^a+a-1)-a\}$

$=2\cdot(\sqrt{2})^a-1$

$5 \leq 2\cdot(\sqrt{2})^a-1 \leq 110$. $3 \leq (\sqrt{2})^a \leq 55.5$

$\therefore a=4, 6, 8, 10$

a가 홀수. 정수 m. $m<(\sqrt{2})^a<m+1$.

$\{f(a) | f(a)$는 정수$\}$

$=\{-3a+1, \cdots, m-3a\} \cup \{a+1, \cdots, m+a\}$

(f의 치역 중 정수 개수)

$=(m)+(m)=2m$.

$5\le 2m\le 110$. $2.5\le m\le 55$.

$a=1$. $1<(\sqrt{2})^1=\sqrt{2}<2$. $m=1$. x.

$a=3$. $2<(\sqrt{2})^3=\sqrt{8}<3$. $m=2$. x.

$a=5$. $5<(\sqrt{2})^5=\sqrt{32}<6$. $m=5$. ok.

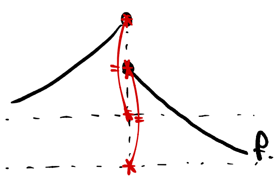
$a=7$. $11<(\sqrt{2})^7=\sqrt{128}<12$. $m=11$. ok.

$a=9$. $(\sqrt{2})^9<(\sqrt{2})^{10}=32$. $m\le 32$. ok.

$\therefore a=5, 7, 9$

ii) 서로의 치역이 겹칠 때

$a=11, 12, \cdots$



a가 짝수

$\{f(a) | f(a)$는 정수$\}=\{-3a+1, \cdots, (\sqrt{2})^a+a-1\}$

(f의 치역 중 정수 개수) $=\{(\sqrt{2})^a+a-1\}-(-3a)$

$=(\sqrt{2})^a+4a-1$.

$a=12$. $(\sqrt{2})^{12}+4\cdot 12-1=111$. x.

$\vdots$

조건 만족시키는 짝수 a 존재 x.

a가 홀수 정수 m. $m<(\sqrt{2})^a<m+1$.

$\{f(a) | f(a)$는 정수$\}=\{-3a+1, \cdots, m+a\}$

(f의 치역 중 정수 개수) $=(m+a)-(-3a)$

$=m+4a$.

$a=11$. $m<(\sqrt{2})^{11}=32\sqrt{2}<m+1$.

$\left(\frac{m}{2}\right)^2<512<\left(\frac{m+1}{2}\right)^2$

$22^2=484$.

$22.5^2=484+22+\frac{1}{4}=506+\frac{1}{4}$.

$23^2=529$.

$m=45$. $m+4a=89$. ok.

$a=12$일 때 111개니까

"당연히" $a=11$은 되고 $a=13$일 때는 안되겠네?

하고 넘어가도 good.

$a=13$. $64<m<64\sqrt{2}<m+1$.

$m+4a>64+52=116$. x.

$\vdots$

$\therefore a=11$.

i), ii)에서 $a=4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$. $\therefore$ 8개.

13. 최고차항의 계수가 1이고 모든 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{f(x)-\frac{1}{x}}=\infty$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 최솟값은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$\text{If } f(1)\neq 1.\quad \lim_{x\to1}\frac{1}{f(x)-\frac{1}{x}}=\frac{1}{f(1)-1}\quad X.$

$\therefore f(1)=1.$

$\lim_{x\to1}\frac{1}{f(x)-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x}{xf(x)-1}=\infty.$

$xf(x)-1=(x-1)^n g(x).\quad (g(1)\neq0.\ n\le4)$

$n=1,3\ ;\ x\to1-.\ xf(x)-1\to0-.\ \&\ x\to1+.\ xf(x)-1\to0+.\ \cdots(*)$

$\text{or } x\to1-.\ xf(x)-1\to0+\ \&\ x\to1+.\ xf(x)-1\to0-.\ \cdots(**)$

$\therefore (*).\ \lim_{x\to1-}\frac{x}{xf(x)-1}=-\infty.\ \lim_{x\to1+}\frac{x}{xf(x)-1}=\infty.$

$\text{or } (**).\ \lim_{x\to1-}\frac{x}{xf(x)-1}=\infty.\ \lim_{x\to1+}\frac{x}{xf(x)-1}=-\infty.\quad X.$

$n=4\ ;\ xf(x)-1=(x-1)^4.$

$f(x)=\frac{1}{x}\{(x-1)^4+1\}.\ f(x)\notin\{p(x)\mid p(x)$는 삼차함수$\}$

$n=2\ ;\ g(x)=x^2+ax+b.\ xf(x)-1=(x-1)^2(x^2+ax+b).$

$x=0.\ -1=1\cdot b.\ b=-1.$

$x>1\ xf(x)-1\to0+.\ 1+a+b=\underline{a>0}.\ (\because g(1)\neq0).$

$xf(x)-1=(x-1)^2(x^2+ax-1)$
$=x^4+(a-2)x^3-2ax^2+(a+2)x-1.$

$\therefore f(x)=x^3+(a-2)x^2-2ax+(a+2).$

계수가 모두 정수. $a=1,2,3,\cdots$

$\therefore f(3)=27+9(a-2)-6a+a+2$
$=4a+11\ge15.$ 최소 15.

14. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1}{2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<\frac{3}{4}\quad\cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 증명한 것이다.

> 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$을
>
> $$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
>
> 이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{2}\le a_n<\frac{3}{4}$임을 보이면 된다.
>
> $n=1$일 때, $a_1=\frac{1}{2}$이므로 $(*)$이 성립한다.
>
> $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여,
>
> $a_n-a_{n-1}=\boxed{(가)}$ $a_n-a_{n-1}=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-2}\right)$
>
> 이고 $a_n=a_1+\sum_{i=2}^{n}(a_i-a_{i-1})$이므로 $=\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$
>
> $0<\boxed{(가)}<\frac{1}{4n(n-1)}$ 임을 이용하면
>
> $$a_1<a_n<a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{4i(i-1)}=\frac{3}{4}-\boxed{(나)}$$
>
> 이다. 이때, $0<\boxed{(나)}<\frac{1}{4}$이므로 $(*)$이 성립한다.
>
> 따라서 모든 자연수 n에 대하여 부등식 g(n)을 구했다면 당연히..
>
> $$\frac{1}{2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<\frac{3}{4}$$
>
> 이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $\frac{g(3)}{f(8)}$의 값은? [4점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

$2n-1<2n.\quad \frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}\quad \therefore \frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}>0.$

$2n-2<2n-1.\quad 2n(2n-2)=4n(n-1)<2n(2n-1).$

$\therefore \frac{1}{4n(n-1)}>\frac{1}{2n(2n-1)}$

$0<a_2-a_1<\frac{1}{4\cdot2\cdot1}$

$0<a_3-a_2<\frac{1}{4\cdot3\cdot2}$

$\vdots$

$+\ \underline{0<a_n-a_{n-1}<\frac{1}{4\cdot n\cdot(n-1)}}$

$0<a_n-a_1<\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{4i(i-1)}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right).$

$a_1<a_n<a_1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4n}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4n}.$

$f(n)=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n(2n-1)}.\quad g(n)=\frac{1}{4n}.$

$f(8)=\frac{1}{16\cdot15}=\frac{1}{240}.\quad g(3)=\frac{1}{12}.$

$\frac{g(3)}{f(8)}=20.$

15. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)-x^3+x\}\{f(x)+x^2-1\}\le 0$$

을 만족시킬 때, $\int_{-1}^{2}|f(x)|\,dx$의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

① $\frac{11}{3}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{23}{6}$ ④ $\frac{47}{12}$ ⑤ 4

$\{f(x)-(x^3-x)\}\{f(x)-(1-x^2)\}\le 0.$

$f(x)$. $y=x^3-x$ & $y=-x^2+1$ 사이.

$x^3-x=-x^2+1$. $x(x+1)(x-1)=-(x+1)(x-1)$

∴ $x=-1,-1,1$.
$x=-1$에서 접함

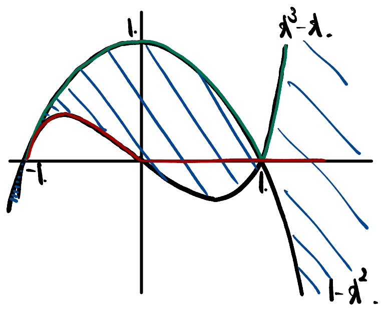
$|x^3-x|\ge|-x^2+1|$. $|x|\cdot|x^2-1|\ge|x^2-1|$.

$|x^2-1|\cdot(|x|-1)\ge 0$.

$|x^2-1|=0$ or $|x|-1\ge 0$.

∴ $|x|\ge 1$

$|x^3-x|\le|-x^2+1|$. $|x|\le 1$. (*)



∴ $x<1$.
$x^3-x\le f(x)\le -x^2+1$.

$x\ge 1$.
$-x^2+1\le f(x)\le x^3-x$.

Sol 1> 최대 ∵(*) $-1\le x<1$에서 $f(x)=-x^2+1$
$x\ge 1$에서 $f(x)=x^3-x$. 연속.

∴ $M=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx+\int_{1}^{2}(x^3-x)dx$

$=2\cdot\left(-\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2=\frac{43}{12}$.

최소 $-1\le x<0$에서 $f(x)=x^3-x$.
$x\ge 0$에서 $f(x)=0$. 연속.

∴ $m=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{2}0\,dx=\frac{1}{4}$.

∴ $M+m=\frac{43}{12}+\frac{1}{4}=\frac{23}{6}$.

Sol 2> $-1\le x\le 0$에서 $0\le x^3-x\le f(x)\le -x^2+1$.

∴ $\frac{1}{4}=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx\le\int_{-1}^{0}|f(x)|dx\le\int_{-1}^{0}(-x^2+1)dx=\frac{2}{3}$. ∵(*)

$0\le x\le 1$에서 $x^3-x\le 0$. $x^3-x\le f(x)\le -x^2+1$

∴ $0\le\int_{0}^{1}|f(x)|dx\le\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx=\frac{2}{3}$. ∵(*)

$1\le x\le 2$에서 $-x^2+1\le 0$. $-x^2+1\le f(x)\le x^3-x$.

∴ $0\le\int_{1}^{2}|f(x)|dx\le\int_{1}^{2}(x^3-x)dx=\frac{9}{4}$. ∵(*)

∴ $\frac{1}{4}+0+0=\frac{1}{4}\le\int_{-1}^{2}|f(x)|dx\le\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{9}{4}=\frac{43}{12}$.

최소. $-1\le x<0$에서 $f(x)=x^3-x$
$0\le x\le 2$에서 $f(x)=0$. 연속. ok.

최대 $-1\le x<1$에서 $f(x)=-x^2+1$.
$1\le x\le 2$에서 $f(x)=x^3-x$. 연속. ok.

15. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)-x^3+x\}\{f(x)+x^2-1\} \le 0$$

을 만족시킬 때, $\int_{-1}^{2} |f(x)|\,dx$의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

① $\frac{11}{3}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{23}{6}$ ④ $\frac{47}{12}$ ⑤ 4

단답형

16. $\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k-1)-\sum_{k=1}^{10}(k^2+4)$의 값을 구하시오. [3점] 60.

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k-1)-\sum_{k=1}^{10}(k^2+4)=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2+2k-1)-(k^2+4)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(2k-5)$$
$$=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-50=60.$$

설마 인수분해해서...?

17. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(1)=g(1)=2$이고 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=3x^4+2x^2-1$$

을 만족시킬 때, $f'(1)+g'(1)$의 값을 구하시오. [3점] 8.

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=12x^3+4x.$$
$$x=1.\quad f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=2\{f'(1)+g'(1)\}$$
$$=12+4=16.$$
$$\therefore f'(1)+g'(1)=8.$$

18. 부등식 $\log_2|x-1|<\log_4(2x+1)$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 곱을 구하시오. [3점] 6.

진수. $|x-1|>0$. $x\neq 1$.
$2x+1>0$. $x>-\frac{1}{2}$ v.

$\log_2|x-1|=\log_4(x-1)^2<\log_4(2x+1)$.

$(x-1)^2<2x+1$

$x^2-4x=x(x-4)<0$. $0<x<4$. v.

$\therefore x=2,3$. (곱)$=6$.

19. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=2$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int f(x)dx$가 있다. $g(2)-g(1)=\frac{7}{3}$일 때, $g(3)-g(0)$의 값을 구하시오. [3점] 9.

잉?? x^2만 적분해도?

$x=\frac{3}{2}$ 대칭..?

$f(x)=x^2+ax+b$. a, b 상수

$f(1)=1+a+b=2$. $a+b=1$

$g(x)=\int f(x)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx+C$. C. 적분상수.

$g(2)-g(1)=\left(\frac{8}{3}+2a+2b+C\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}a+b+C\right)$

$=\frac{7}{3}+\frac{3}{2}a+b=\frac{7}{3}$. $b=-\frac{3}{2}a$.

$\therefore a=-2$. $b=3$. $y=ax+b$. $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 대칭..

$g(3)-g(0)=\left(9+\frac{9}{2}a+3b+C\right)-(C)$

$=9-9+9=9$.

$g(\beta)-g(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$ (수학Ⅱ에서..) 이므로

$g(2)-g(1)=\int_1^2 f(x)dx$. $g(3)-g(0)=\int_0^3 f(x)dx$만 해도 good.

20. $n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 $\log\frac{n}{10}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{m} f(n)=m-2$가 되도록 하는 2 이상의 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점] 38.

$n<10$. $\log\frac{n}{10}<0$.

$\therefore n=2,4,6,8$. $f(n)=0$.

$\log\frac{10}{10}=0$. $\therefore f(10)=1$.

$n>10$. $\log\frac{n}{10}>0$.

$\therefore n=12,14,16,\cdots$. $f(n)=2$.

n 홀수. $f(n)=1$.

sol 1> 직접 나열.

$\sum_{n=2}^{m} f(n)$:

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sum$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	1	2	2	3	3	4	4

m	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\sum$	6	8	9	11	12	$\boxed{14}$	$\boxed{15}$	17	18	20 ⋯

$\therefore m=2,3,16,17$ 합 38.

sol 2> $\sum_{n=2}^{2} f(n)=f(2)=0=2-2$. ok.

$\sum_{n=2}^{3} f(n)=f(2)+f(3)=0+1=1=3-2$. ok.

이후 (0 개수)=(2 개수) ⋯

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f(n)$	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2 ⋯

3개 3개

$\therefore m=2,3,16,17$.

21. 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-g(x)=g'(x)$이다.
>
> (나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선이 일치한다.

집합 $\{x\mid\{f(x)-g(0)\}\{g(x)-f(0)\}=0,\ x는\ 실수\}$(*)의 원소의 개수를 구하시오. [4점] 2.

$f(x)=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4.$ $\quad a_1b_1\neq 0.$

$g(x)=b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4.$

$(a_1-b_1)x^3+(a_2-b_2)x^2+(a_3-b_3)x+(a_4-b_4)$
$=3b_1x^2+2b_2x+b_3.$

$\therefore\ a_1=b_1.$ $a_2-b_2=3b_1.$ $a_3-b_3=2b_2.$ $a_4-b_4=b_3.$
$a_2=3b_1=3a_1.$ $\quad =0.$ $\quad =0.$

접선. $f'(0)x+f(0)=g'(0)x+g(0)$

$\therefore\ f'(0)=g'(0).$ $a_3=b_3$
$f(0)=g(0)$ $a_4=b_4.$

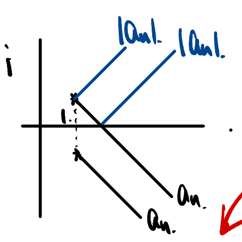
$\therefore\ f(x)=a_1x^3+3a_1x^2+a_4.$ $g(x)=b_1x^3+b_4$

$f(x)-g(0)=(a_1x^3+3a_1x^2+a_4)-b_4=a_1x^2(x+3)=0.$ $x=0,-3.$

$g(x)-f(0)=(b_1x^3+b_4)-a_4=b_1x^3=0.$ $x=0.$

(*)$=\{-3,0\}.$ 원소 2개.

$d<0$;



$a_2<0\ldots$

$a_1<0.$ $b_n=\dfrac{a_1-a_n}{n-1}=-d.$ $(n\geq 2)$

$b_4+b_{10}=-2d=2.$ $d=-1.$

$b_{|d|+2}=b_3=1.$ x.

$b_4+b_{10}=-2d\neq b_m=-d$
얘를 파악하고 바로 걸러도 good!

$a_1\geq 0.$ $b_n=\dfrac{-a_n-a_1}{n-1}.$ $(n\geq 2)$

$b_4+b_{10}=\dfrac{-a_4-a_1}{3}+\dfrac{-a_{10}-a_1}{9}=2.$ $\quad 4a_1+9d=-9.$

$b_{|d|+2}=\dfrac{-a_{-d+2}-a_1}{-d+1}=\dfrac{-2a_1+d^2-d}{-d+1}=2.$ $\quad 2a_1=d^2+d-2.$

$4a_1=-9-9d=2d^2+2d-4.$ $2d^2+11d+5=(2d+1)(d+5)=0.$ $d=-5.$

$a_1=9.$ $a_n=-5n+14.$ $\quad$ But $a_2=4>0.$ x.

$\therefore\ a_n=5n-14.$ $|d\times a_1|=45.$

22. 공차가 정수 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n=\begin{cases} d & (n=1) \\ \dfrac{|a_n|-|a_1|}{n-1} & (n\geq 2)\end{cases}$$

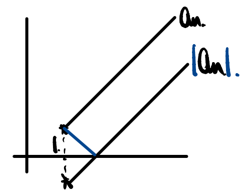
이라 하면 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $b_n=d$를 만족시키는 1보다 큰 자연수 n은 존재하지 않는다.
>
> (나) $b_4+b_{10}=b_{|d|+2}=2$

$|d\times a_1|$의 값을 구하시오. [4점] 45.

$d=0$; 모든 자연수 n에 대하여 $b_n=d=0.$ x.

$d>0$;



$a_1\geq 0$이면
모든 자연수 n에 대하여
$b_n=d.$ x.

$\therefore\ a_1<0.$ $n\geq 2$일 때 $b_n=\dfrac{|a_n|+a_1}{n-1}$

$b_4+b_{10}=\dfrac{|a_4|+a_1}{3}+\dfrac{|a_{10}|+a_1}{9}=2.$ $\quad 3|a_4|+|a_{10}|+4a_1=18.$

$a_4<0.$ $\begin{cases} a_{10}\geq 0. & -3a_4+a_{10}+4a_1=(-3a_1-9d)+(a_1+9d)+4a_1=18. \quad a_1=9.\ x. \\ a_{10}<0. & -3a_4-a_{10}+4a_1=-18d=18. \quad d=-1.\ x. \end{cases}$

$a_4\geq 0.$ $3a_4+a_{10}+4a_1=8a_1+18d=18.$ $\quad 4a_1+9d=9$

$b_{|d|+2}=\dfrac{|a_{|d|+2}|+a_1}{(|d|+2)-1}=\dfrac{|a_{|d|+2}|+a_1}{d+1}$

$=\begin{cases} a_{|d|+2}<0. \quad d=1. \quad \dfrac{-a_3+a_1}{2}=-d=2.\ x. \\ a_{|d|+2}\geq 0. \quad \dfrac{a_{|d|+2}+a_1}{|d|+1}=\dfrac{2a_1+(d+1)d}{d+1}=2. \\ \qquad 2a_1=-d^2+d+2 \end{cases}$

$4a_1=9-9d=-2d^2+2d+4.$ $\quad 2d^2-11d+5=(d-5)(2d-1)=0.$

$\therefore\ d=5.$ $a_1=-9.$ $a_n=5n-14.$

$a_{|5|+2}>a_4=6\geq 0.$ ok.

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\int_0^1 (e^x+1)\,dx$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $e-1$ ③ e ④ $e+1$ ⑤ $2e-1$

$\int_0^1 (e^x+1)dx = e^x + x \Big|_0^1$

$= (e+1)-(1+0) = e.$

24. $\lim_{x\to 0}(\sec x)^{\frac{\cos x}{1-\cos x}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1 ④ e ⑤ e^2

$\sec x = 1+t$ 로 치환.

$\sec x - 1 = t.$ $t \to 0+.$

$\lim_{x\to 0}(\sec x)^{\frac{\cos x}{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0}\{1+(\sec x-1)\}^{\frac{1}{\sec x - 1}}$

$= \lim_{t\to 0+}(1+t)^{\frac{1}{t}}$

$= e.$

25. $x=1$에서 $x=2$까지의 곡선 $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$의 길이는? [3점] (*)

① 1 ② $\dfrac{17}{12}$ ③ $\dfrac{11}{6}$ ④ $\dfrac{9}{4}$ ⑤ $\dfrac{8}{3}$

$L=(*)=\displaystyle\int_1^2\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$

$=\displaystyle\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^4}}\,dx$

$=\displaystyle\int_1^2\sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx=\int_1^2\left|\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}\right|dx$ (**)

$=\displaystyle\int_1^2\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}\right)dx$ ($\because$ $1\le x\le 2$에서 (**) >0)

$=\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2x}\right)\Big|_1^2=\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)$

$=\dfrac{17}{12}$

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{9n^3}{n^2+1}$$

을 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{5}{2}$ ② 3 ③ $\dfrac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{2}$

$a_1=\dfrac{9}{1+1}=\dfrac{9}{2}$.

$n\ge 2$. $a_n=\dfrac{9n^3}{n^2+1}-\dfrac{9(n-1)^3}{(n-1)^2+1}$.

$\dfrac{9n^3}{n^2+1}=9n-\dfrac{9n}{n^2+1}$

$=\left(9n-\dfrac{9n}{n^2+1}\right)-\left\{9(n-1)-\dfrac{9(n-1)}{(n-1)^2+1}\right\}$

$=9-\left\{\dfrac{9n}{n^2+1}-\dfrac{9(n-1)}{(n-1)^2+1}\right\}$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1)$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{9-\frac{9(n+1)}{(n+1)^2+1}+\frac{9n}{n^2+1}-\frac{9}{2}\right\}$

$=\dfrac{9}{2}$.

27. $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x) = |x\sin x|$의 극값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 차례대로 a_1, a_2, a_3이라 할 때, 방정식 $f(f(x)) = a_2$의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

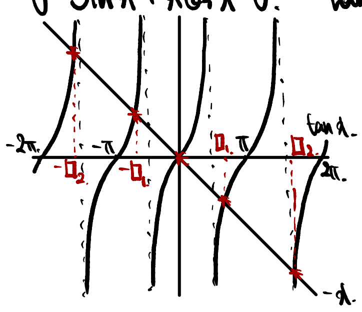
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

기본소양..!

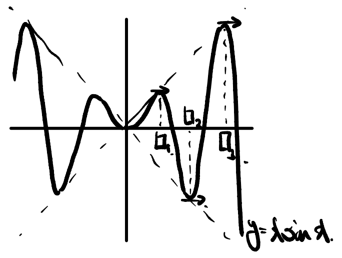
$x \ge 0$. $-x \le x\sin x \le x$
등호. $\sin x = -1$. 등호. $\sin x = 1$.
$x < 0$. $x \le x\sin x \le -x$.
등호. $\sin x = 1$. 등호. $\sin x = -1$.

$y = x\sin x$. $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{5}{2}\pi, \pm\frac{9}{2}\pi \cdots \text{에서 } y = x\text{에 접.} \\ x = \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{7}{2}\pi, \pm\frac{11}{2}\pi \cdots \text{에서 } y = -x\text{에 접.} \end{cases}$

$y' = \sin x + x\cos x = 0$. $\tan x = -x$.



$y = x\sin x$. $x = 0$, $\pm\square_n$에서 극값.
$(\tan\square_n + \square_n = 0$. & $(n - \frac{1}{2})\pi < \square_n < n\pi$.)

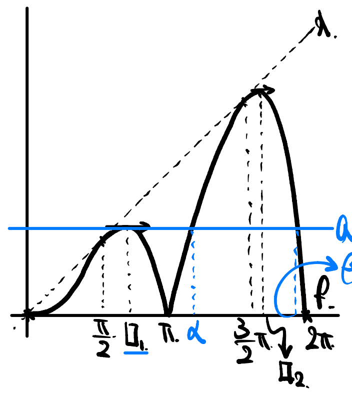
→ 

y축 대칭.
$x = (\text{정수})\pi$. $y = 0$.
$x = 0$, $\pm\square_{2n}$ 극소.
$x = \pm\square_{2n-1}$ 극대.

$0 \le x \le 2\pi$. $|x\sin x| = \begin{cases} x\sin x & (0 \le x < \pi) \\ -x\sin x & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$

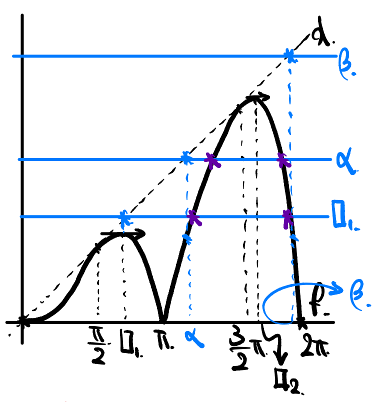
$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0$. $x \ne n\pi$에서 $f(x) > 0$. ∴ $x = \pi$에서 f 극소.

f. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$에서 $y = x$에 접. $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. $f(\frac{3}{2}\pi) = \frac{3}{2}\pi$.



$a_1 = 0$. $a_2 = f(\square_1)$ $a_3 = f(\square_2)$

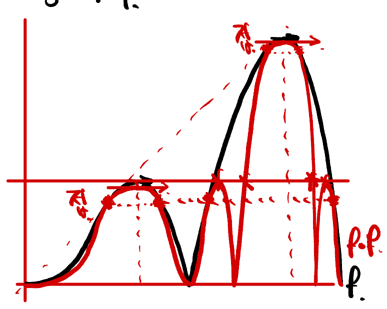
$f(f(x)) = a_2$.
$f(x) = \square_1, \alpha, \beta$



$f(\square_1) = \square_1\sin\square_1 < \square_1 < \pi$.
$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.
$\square_2 < \beta < 2\pi$.

∴ $f(x) = \square_1, \alpha, \beta$ 각각 2개, 2개, 0개
총 4개.

$y = f(f(x))$의 그래프를 그리면..?



28. 모든 양수 x에 대하여 $f(x) > 0$, $g(x) > 0$이고 이계도함수가 존재하는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 양수 x에 대하여
> $$\int_0^{\ln x + 1} f(g(t))\,dt = x - k \ (k\text{는 상수})$$
> 이다.
>
> (나) $g(1) = 1$, $g(3) = 3$, $\displaystyle\int_1^3 \{g(x)\}^2 dx = \frac{26}{3}$

$k \times \displaystyle\int_1^3 x\ln f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{4}{e}$ ② $\frac{13}{3e}$ ③ $\frac{14}{3e}$ ④ $\frac{5}{e}$ ⑤ $\frac{16}{3e}$

$x = \frac{1}{e}$. $\int_0^0 = \frac{1}{e} - k = 0$. ∴ $k = \frac{1}{e}$

$f(x)$의 부정적분 $F(x)$. 미분가능 g.

$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{g(x)} f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\{F(g(x)) - F(0)\}$
$= f(g(x))g'(x)$

$\frac{d}{dx}\left\{\int_0^{\ln x+1} f(g(t))\,dt\right\} = f(g(\ln x + 1)) \cdot \frac{1}{x} = 1$

∴ $f(g(\ln x + 1)) = x$.

sol 1> $\int_1^3 x\ln f(x)\,dx$. $x = g(\ln t + 1)$. $x = 1 = g(1)$. $t = 1$. $x = 3 = g(3)$. $t = e^2$.

$= \int_1^{e^2} g(\ln t + 1) \cdot \ln f(g(\ln t + 1)) \cdot g'(\ln t + 1) \cdot \frac{1}{t}\,dt$

$= \int_1^{e^2} g(\ln t + 1) g'(\ln t + 1) \cdot \frac{\ln t}{t}\,dt$. $\ln t + 1 = s$.

$= \int_1^3 g(s)g'(s) \cdot (s - 1)\,ds$.

$= \frac{1}{2}(s-1)\{g(s)\}^2\Big]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{2}\{g(s)\}^2 ds$.

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{3} = \frac{14}{3}$

∴ $k \cdot \int_1^3 x\ln f(x)\,dx = \frac{14}{3e}$.

sol 2> x 대신 e^{x-1}. $f(g(x)) = e^{x-1}$.

$\int_1^3 x\ln f(x)\,dx$. $x = g(u)$.

$= \int_1^3 g(u) \cdot \ln f(g(u)) \cdot g'(u)\,du$

$= \int_1^3 (u - 1)g(u)g'(u)\,du$

$= \cdots$

단답형

29. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{3x^4-8x^3+ax^2}{x^2+1}$이 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최솟값을 구하시오. [4점] 7.

"도함수 부호변화 ⇒ 극값" ⋯(*)의 대우.
"극값 x ⇒ 도함수 부호변화 x." ⋯(**)

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(12x^3-24x^2+2ax)-(2x)\cdot(3x^4-8x^3+ax^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{\{12x^5-24x^4+(2a+12)x^3-24x^2+2ax\}-(6x^5-16x^4+2ax^3)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{6x^5-8x^4+12x^3-24x^2+2ax}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2}{(x^2+1)^2}\cdot\{x(3x^4-4x^3+6x^2-12x+a)\}=0.$$

$x=0$. or $3x^4-4x^3+6x^2-12x+a=0$.

$a>0$. $x<0$에서 $f'<0$. $x>0$에서 $f'>0$. { 이계도함수 판정법도 good.

∴ $x=0$에서 f 극소.

∴ $x\neq0$에서 f' 부호변화 x. $3x^4-4x^3+6x^2-12x+a\geq0$.

$g(x)=3x^4-4x^3+6x^2-12x+a$.

$g'(x)=12x^3-12x^2+12x-12$

$=12(x-1)(x^2+1)=0$. $x=1$.

∴ g. $x=1$에서 극소 & 최소. $g(1)=3-4+6-12+a\geq0$.

$a\geq7$ 최소 7.

30. 두 상수 a, $r\,(r>0)$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\sqrt{r^2-(x-a)^2}$$

이다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\{f(x)\}^n+\left(\sqrt{x^2+1}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}$$

라 할 때, 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 $x=\sqrt{3}$ 뿐이다. a^2+r^2의 값을 구하시오. [4점] 19.

$f(x)\geq0$...

$A\geq B\geq0$. ; $(A^n+B^n)^{\frac{1}{n}}=\left[A^n\cdot\left\{1+\left(\frac{B}{A}\right)^n\right\}\right]^{\frac{1}{n}}$
$(A>0)$.

$=A\cdot\left\{1+\left(\frac{B}{A}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$.

$1\leq1+\left(\frac{B}{A}\right)^n\leq1+1=2$.

$\lim_{n\to\infty}1^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$. $\left(\frac{1}{n}=t \text{로 치환.}\right)$

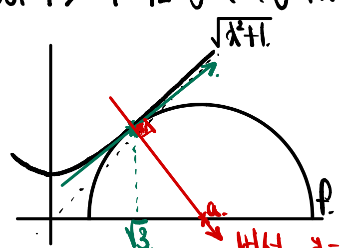
∴ $\lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(\frac{B}{A}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}=1$.

∴ $\lim_{n\to\infty}(A^n+B^n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}A\cdot\left\{1+\left(\frac{B}{A}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$

$=A$.

$$\therefore\ g(x)=\begin{cases}f(x) & (f(x)\geq\sqrt{x^2+1}).\\ \sqrt{x^2+1}. & (f(x)<\sqrt{x^2+1}).\end{cases}$$

Sol 1> 두 곡선 $y=f(x)$. $y=\sqrt{x^2+1}$. 교점 $x=\sqrt{3}$에서만.



∴ $f(\sqrt{3})=\sqrt{3+1}=2$.

$f'(\sqrt{3})=\left.\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right|_{x=\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

법선 $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})+2$ 이용해도 good!

$f(\sqrt{3})=\sqrt{r^2-(\sqrt{3}-a)^2}=2$. ✓. $r^2-(\sqrt{3}-a)^2=4$. $r^2=7$.

$f'(\sqrt{3})=\left.\dfrac{-2(x-a)}{2\sqrt{r^2-(x-a)^2}}\right|_{x=\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}-a}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $a=2\sqrt{3}$. ✓

∴ $a^2+r^2=19$.

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

Sol 2> 반원인 줄 모를 때..

$h(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$. $x=\sqrt{3}$에서 "만" 최대 1.

$\therefore \{h(x)\}^2 = \dfrac{\{f(x)\}^2}{x^2+1} = \dfrac{r^2-(x-a)^2}{x^2+1}$. $x=\sqrt{3}$에서 "만" 최대 1.

$\dfrac{r^2-(\sqrt{3}-a)^2}{3+1} = 1$. $r^2-(\sqrt{3}-a)^2 = 4$. v.

$\left(\dfrac{r^2-(x-a)^2}{x^2+1}\right)' = \left.\dfrac{-2ax^2+(2a^2-2r^2-2)x+2a}{(x^2+1)^2}\right|_{x=\sqrt{3}} = 0$.

$-3a+(a^2-r^2-1)\cdot\sqrt{3}+a=0$. $r^2 = a^2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}a-1$. v.

$a^2-2\sqrt{3}a+7 = a^2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}a-1$.

$\therefore a=2\sqrt{3}$. $r=\sqrt{7}$.

"실제로 최대... ?"

$\{h(x)\}^2 = \dfrac{7-(x-2\sqrt{3})^2}{x^2+1}$.

정의역 $[2\sqrt{3}-\sqrt{7}, 2\sqrt{3}+\sqrt{7}]$에서 $\{h(x)\}^2 \geq 0$. 미분가능.

$\dfrac{d}{dx}\{h(x)\}^2 = \dfrac{-4\sqrt{3}x^2+8x+4\sqrt{3}}{(x^2+1)^2} = (x-\sqrt{3})\cdot\left\{(-4)\cdot\dfrac{\sqrt{3}x+1}{(x^2+1)^2}\right\}$.

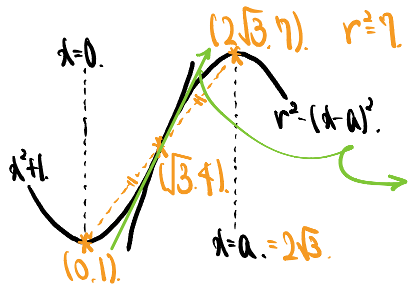
$x=\sqrt{3}$에서만 극값.

$x<\sqrt{3}$에서 $(h^2)'>0$. $x>\sqrt{3}$에서 $(h^2)'<0$.

$\therefore$ 극대 & 최대   이계도함수 판정법도 good.

Sol 2-1> $\dfrac{r^2-(x-a)^2}{x^2+1} \leq 1$.

$r^2-(x-a)^2 \leq x^2+1$. 등호 $x=\sqrt{3}$일 때만.



$l: y = 2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})+4$
$= 2\sqrt{3}x-2$.

"접함?"

$(x^2+1)-(2\sqrt{3}x-2) = x^2-2\sqrt{3}x+3$
$= (x-\sqrt{3})^2$.

$\{7-(x-2\sqrt{3})^2\}-(2\sqrt{3}x-2) = -x^2+2\sqrt{3}x-3$.
$= -(x-\sqrt{3})^2$.

모두 $(\sqrt{3}, 4)$에서 l에 접함. ok.