2017학년도 인하대학교 논술 기출

$a_n = 1 + a_1 a_2 \cdots a_{n-1}\,(n \geq 2)$, $a_1 = 1$

이때, $S_n = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}$ 이라 하자.

(1) 모든 자연수 n에 대하여, $S_n = 2 - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$ 임을 보여라

자, 시도해 보셨으면 알겠지만 증명해보이기 쉬운꼴은 아닙니다. 수열의 일반항+증명이면 귀납법을 자연스럽게 떠올려볼만 하겠죠?
자 그렇다면 귀납법을 적용해봅시다
순서대로 해보자면

$n=1$일 때, $S_1 = \dfrac{1}{a_1} = 1$인데, $2 - \dfrac{1}{a_2 - 1} = 2 - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1} = 2 - \dfrac{1}{a_1} = 1$이므로

$S_1 = 2 - \dfrac{1}{a_2 - 1}$ 이 성립하겠네요

$n=k$일 때, $S_k = 2 - \dfrac{1}{a_{k+1} - 1}$ 가 성립한다 가정해봅시다. 그렇다면 우리가 보이고싶은건

$n=k+1$일 때, $S_{k+1} = 2 - \dfrac{1}{a_{k+2} - 1}$ 임을 보이는것이죠. 자 그리고 성립한다고 가정한 식을 이용하려면 S_k라는식은 그대로 사용을 해주는 상태에서 S_{k+1}을 만들어줘야하고, 우리가 보여야 하는 식과 겹치면 안되므로 $S_{k+1} = S_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}$을 이용하여

$S_{k+1} = 2 - \dfrac{1}{a_{k+1} - 1} + \dfrac{1}{a_{k+1}} = -\dfrac{1}{a_{k+2} - 1}$ 이런 식을 얻을 수 있습니다.

즉, 우측의 $2 - \dfrac{1}{a_{k+1} - 1} + \dfrac{1}{a_{k+1}} = -\dfrac{1}{a_{k+2} - 1}$ 을 보이면 됩니다.

우변을 변형하여 좌변을 얻어내도 되고 좌변을 변형하여 우변을 보여도 되는데, 우변을 변형해봅시다.

$$2 - \frac{1}{a_{k+1} - 1} + \frac{1}{a_{k+1}} = 2 - \frac{1}{(a_{k+1} - 1)a_{k+1}} = 2 - \frac{1}{(a_1 a_2 \ldots a_k)a_{k+1}} = 2 - \frac{1}{a_{k+2} - 1}$$

성립하네요! 따라서 $n = k+1$일 때도 $S_n = 2 - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$ 가 성립합니다.

그렇다면, 서술할 때 아래와 같은 문장을 적어서 결론을 내주면 깔끔하겠죠?

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $S_n = 2 - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$ 가 성립한다.

(2) 논제 (1)에서 구한 $S_n = 2 - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$ 를 이용하자.

(2) 모든 자연수 n 에 대하여, $S_n < 2$ 임을 보여라

세트형 문항인만큼, (1)의 내용을 활용해야겠죠?

그리고 $S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ 에서 $S_n < 2$ 임을 보이기에는 확실히 답도없구요

(1)에서 얻은 $S_n = 2 - \frac{1}{a_{n+1}-1}$ 를 활용해봅시다. 그렇다면 $a_{n+1} > 1$이기만 하면 항상 성립하겠네요

그러나 문제점은 $a_{n+1} > 1$임을 보이는 것 역시 쉽지 않다는 것이죠.

결국 귀납법으로 증명해 봐야겠네요.

순서대로 해보자면,

$n=2$ 일 때, $a_2 = 2$ 이므로 $a_n > 1$ 가 성립하구요 ($n=2$부터 대입하는 이유는 일반항이 $n \geq 2$ 부터 정의되었기 때문이죠)

$n=k$ 일 때, $a_k > 1$ 가 성립한다고 가정해봅시다. 그렇다면 우리가 보이고싶은건은

$n=k$ 일 때, $a_{k+1} > 1$을 보이는것이죠.

$a_k > 1$ 를 그대로 사용해야 하므로 a_k의 귀납적 정의를 이용해보면

$a_k = 1 + a_1 a_2 \cdots a_{k-1}$ 이므로 $a_1 a_2 \cdots a_{k-1} > 0$ 를 얻습니다.

이때 우리가 얻고싶은 꼴인 $a_{k+1} = 1 + a_1 a_2 \cdots a_k$ 꼴을 고려해본다면

$a_1 a_2 \cdots a_{k-1} > 0$ 의 양 변에 a_k를 곱하고 1을 더해주는 방향으로 가는게 맞겠죠?

양변에 a_k를 곱하면 $a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k > 0$ 이고 양변에 1을 더하면 $a_{k+1} > 1$ 을 얻네요.

그러므로 $n=k+1$ 일 때 $a_n > 1$가 성립합니다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 1$가 성립하고,

이에 따라 모든 자연수 n에 대하여 $S_n < 2$가 성립합니다

(3) $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값을 구하시오.

당연히 세트형 문항이니 (1)과 (2)의 내용을 사용해야겠죠?

그리고 S_n도 귀납적으로 관계식만 주어져있지, 일반항이 주어진 형태는 아니므로 샌드위치 정리를 떠올려야 합니다! 미리 생각안하고 가면 조금 힘들어요.

(아 물론, (2)의 $S_n < 2$ 를 보고 $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$이진 않을까? 하고 샌드위치정리를 떠올리는게 물론 더 자연스럽긴합니다)

그렇다면 S_n보다 작거나 작거나같으면서 극한이 2로 수렴하는 수열이 필요합니다.

따라서 S_n에 대한 관계식을 찾아보면 (1)에서 $S_n = 2 - \frac{1}{a_{n+1}-1}$ 를 얻었으므로

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \infty$이면 좋을것같은데요! 문제는 이 내용은 (2)에서 절반은 얻은내용이죠.

하지만 이 생각의 흐름을 다시 되짚어보면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \infty$를 보이진 않았습니다.

그렇다면 이것부터 한번 보이면서 중간에 얻어지는 내용들이 있는지 집중해봅시다.

(2)에서 $a_n > 1$를 얻었는데, 만약 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \infty$이려면 제일 무난하게 떠올릴 수 있는 발상은 a_n이 항상 증가해나가는 수열임을 의심해보는것입니다.
확인해봅시다.
$a_{n+1} - a_n = (1+a_1a_2...a_n) - (1+a_1a_2...a_{n-1}) = a_1a_2...a_{n-1}(a_n - 1) > 0$
수열 $\{a_n\}$은 증가수열임이 확인되었네요!

자 여기부터가 중요합니다. 어짜피 S_n에 대한 관계식의 우변은 $S_n < 2$ 이기 때문에 우리가 실제로 관심가져야 하는부분은 S_n의 좌변을 얻어내는 것입니다.
그리고 사용가능한식은 $S_n = 2 - \dfrac{1}{a_{n+1}-1}$ 밖에 존재하지 않으며, 이를 이용하여 2로 수렴하는 좌변을 얻어내야합니다.
우리가 증가수열임을 얻어낸 것을 이용하여 건드릴 수 있는 것은 분모의 $a_{n+1}-1$입니다.
분모가 커지면 분수는 작아지겠죠? 하지만 이정도론 아직 부족합니다.
그리고, a_n은 일반항을 구하기 힘든꼴 인데 이에 대해서 수렴 혹은 발산을 보이기에는 부족한 부분이 많죠. 논술에서, 변하는 식에 대하여 부등식을 만들기 제일 좋은 방식은 최솟값과 최댓값을 찾아내어 부등식을 만드는 것입니다.
(2)의 귀납법을 생각한다면 $a_2 = 2$를 얻었고, a_n은 증가수열이므로 $n > 2$인 자연수 n에 대해 $a_2 < a_n$을 만족합니다. 이를 이용한다면 $a_{n+1} - 1 = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n > a_1(a_2)^{n-1} = 2^{n-1}$
등비수열의 극한으로 정리되는 것을 알 수 있고 등비수열의 극한은 확실하게 구할 수 있는 극한이므로 이제야 우리가 원하던 결과가 나왔네요.

$S_n = 2 - \dfrac{1}{a_{n+1}-1} = 2 - \dfrac{1}{a_1a_2...a_n} > 2 - \dfrac{1}{a_1a_2^{n-1}} = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$입니다

정리하면 $2 - \dfrac{1}{2^{n-1}} < S_n < 2$을 만족하므로 부등식에 극한을 취한다면

$\lim_{n\to\infty}(2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}) = 2$, $\lim_{n\to\infty} 2 = 2$이므로 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$임을 알 수 있습니다!