제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{54}\times 2^{\frac{5}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+x$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h}$ 의 값은? [2점]

$3x^2-6x+1$

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

3. $\cos\theta>0$ 이고 $\sin\theta+\cos\theta\tan\theta=-1$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

$2\sin\theta=-1 \rightarrow \sin\theta=-\frac{1}{2}$
$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases}2x+a & (x<3)\\ \sqrt{x+1}-a & (x\geq 3)\end{cases}$$

$6+a=2-a$

이 $x=3$에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=x(3x+2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x)=x^3+x^2+4$

6. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2}=5,\quad a_5=48$$

$\frac{a_1+a_2}{a_1+a_2}+\frac{a_3+a_4}{a_1+a_2}=1+r^2=5$

$r=2$

일 때, a_1+a_4의 값은? [3점]

$3+24$

① 39 ② 36 ③ 33 ④ 30 ⑤ 27

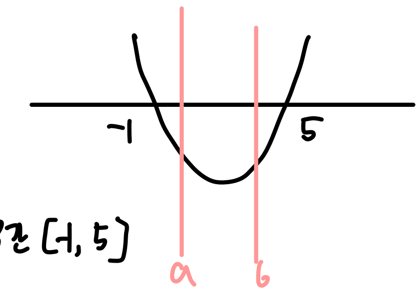
$a_1=3$

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x+1$이 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소할 때, $b-a$의 최댓값은? (단, a, b는 $a<b$인 실수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

미분 가능한 함수의 증가·감소 ⇒ 도함수의 부호를 이용해 판단.

$f'(x)=x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$



감소구간 $[-1, 5]$

$b-a$ = 감소하는 구간의 size

$b-a$의 최대 ⇒ $a=-1$, $b=5$ → $b-a\le 6$

8. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 → 미분 가능한 함수들!

$$(x+1)f(x)+(1-x)g(x)=x^3+9x+1, \quad f(0)=4$$

일 때, $f'(0)+g'(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(0)+g'(0)$: 미분계수 → ① 미분계수의 정의식
: 원함수 식을 모를 때 주로 사용.
→ ② 도함수 이용
: 원함수 식을 알거나, 미분 가능한 함수들로 이루어진 항등식을 이용할 때.

$f(0)=4$ 이므로, $f(0)+g(0)=1 \rightarrow g(0)=-3$

$$f(x)+(x+1)f'(x)-g(x)+(1-x)g'(x)=3x^2+9$$

$f(0)=4,\ g(0)=-3$: $4+f'(0)+3+g'(0)=9$

$$f'(0)+g'(0)=2$$

9. 좌표평면 위의 두 점 $(0, 0)$, $(\log_2 9, k)$를 지나는 직선이 직선 $(\log_4 3)x+(\log_9 8)y-2=0$에 수직일 때, 3^k의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 16 ② 32 ③ 64 ④ 128 ⑤ 256

• 서로 수직인 직선의 기울기 곱 $=-1$
→ 1. 좌표평면상 두 점을 이용
2. 일차식에서, 일차항의 계수
3. 미분계수

l_1의 기울기 $=\dfrac{k}{\log_2 9}=k\cdot\log_9 2$

l_2의 기울기 : $\log_9 8\cdot y=-\log_4 3\,x+2 \Rightarrow y=-\log_4 3\cdot\dfrac{1}{\log_9 8}\cdot x+2\cdot\dfrac{1}{\log_9 8}$

$$y=-\log_4 3\cdot\log_8 9\cdot x+2\cdot\log_8 9$$

∴ 로그에 역수 취하면 밑과 진수가 바뀐다. $\dfrac{1}{\log_a b}=\log_b a$

∴ 로그 끼리의 곱 → 밑끼리 자리 바꾼다.

∴ 로그의 밑,진수에 있는 지수는 밖으로 빼내줄 수 있다. $\log_{a^x} b^y=\dfrac{y}{x}\log_a b$

$k\cdot\log_9 2\cdot -\log_4 3\cdot\log_8 9=-k\cdot\log_9 9\cdot\log_4 3\cdot\log_8 2=-k\cdot 1\cdot\log_4 3\cdot\frac{1}{3}=-1$

$k=3\cdot\log_3 4=\log_3 64$

$3^k=3^{\log_3 64}=64$

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각 → $f(0)=g(0)=0$

$$v_1(t)=3t^2-6t-2, \quad v_2(t)=-2t+6$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q가 다시 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]
↳ 위치가 같을 때 → $f(t)=g(t)$인 t

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

위치: $f(t)$, $g(t)$ $\quad v_1(t)=f'(t)=3t^2-6t-2 \Rightarrow f(t)=t^3-3t^2-2t+0$

속도: $f'(t)$, $g'(t)$ $\quad v_2(t)=g'(t)=-2t+6 \Rightarrow g(t)=-t^2+6t+0$

∴ 다항함수의 도함수를 알 경우, 부정적분을 통해 원함수 식 바로 찾기 가능!

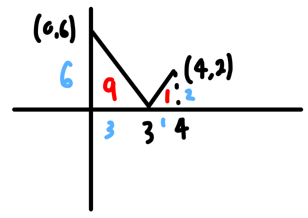
$t^3-3t^2-2t=-t^2+6t \rightarrow t^3-2t^2-8t=t(t^2-2t-8)=t(t-4)(t+2)$

$\Rightarrow t=-2, 0, 4$ $\quad t>0$ 이므로,

$\Rightarrow t=4$까지 움직인 거리 $=\int_0^4 |g'(t)|dt=\int_0^4 |-2t+6|dt$

∴ 움직인 거리 : $\int_a^b |속도|dt$
변위(위치의 변화량) : $\int_a^b 속도\,dt$
] 구분 필수!

적분 → 넓이!



$9+1=10$

11. 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6 = -2,\quad \sum_{k=1}^{8}|a_k| = \sum_{k=1}^{8}a_k + 42$$

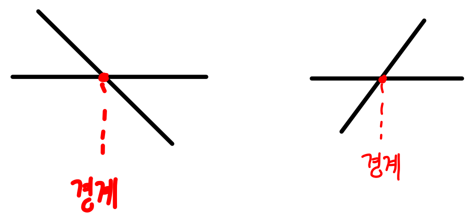
일 때, $\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값은? [4점] 2

① 40 ② 44 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

$|☆| = ☆ \ (☆ \geq 0)$, $-☆ \ (☆ < 0)$ ∴ 절댓값은 부호만 신경쓰자!

|등차수열|: When? 수열의 값이 바뀌는지가 중요!!

→ 등차수열 → 직선이므로!!



수열의 부호가 바뀌는 경계가 제일 중요해!

|등비수열|: $r>0$: 준나 쉬움. 굴이 의미 X

$r<0$: 홀수항, 짝수항마다 부호가 주기적! $a_1>0,\ r<0 \Rightarrow +,-,+,-,+,-,+,-\cdots$

2019.4.29

$a_6 = -2$, $d<0$ 이므로, $a_6 \sim a_8$은 다 음수임!

$a_5 \geq 0$? → $a_5 = -2-d \geq 0 \Rightarrow d \leq -2$

$a_5 < 0$? → $a_5 = -2-d < 0 \Rightarrow d > -2$ 이므로 $d=-1$일때만!

3건: $|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|+|a_6|+|a_7|+|a_8| = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+42$

절댓값 내부가 양수면 (0포함) 소거! 음수면 좌변 이항해보자.

① $d=-1$ → $a_4 = 0$ → $a_1 \sim a_4 \geq 0$, $a_5 \sim a_8 < 0$

$-2a_5 - 2a_6 - 2a_7 - 2a_8 = 42$

$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = -21$

∴ 등차/등비수열에서, 정확한 항의 값을 모른다면? 첫째항 or 주어진 항 기준 통일!

$a_5 = a_6 - d$, $a_7 = a_6 + d$, $a_8 = a_6 + 2d$ $\Rightarrow$ $4a_6 + 2d = -21$, $2d = -29$ → 모순

② $d \leq -2$ → $a_1 \sim a_5 \geq 0$, $a_6 \sim a_8 < 0$

$-2a_6 - 2a_7 - 2a_8 = 42$

$a_6 + a_7 + a_8 = -21$

$3a_6 + 3d = -21 \Rightarrow -6+3d = -21 \Rightarrow d = -5$

$a_6 = -2,\ d = -5 \Rightarrow a_n = -5n+28$

∴ 등차수열의 일반항: ① a_n = 공차$\cdot n$ + ☆로 쓴다.

② 주어진 항 대입 → ☆값 찾기

$a_6 = -5\cdot 6 + ☆ = -2$ → ☆=28

$\sum_{n=1}^{8} -5n+28 = -5\cdot\frac{8\cdot 9}{2} + 224 = 44$

12. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2+3x+a & (x<0) \\ 3x+a & (x \geq 0) \end{cases}$$

$f(x)$는 함수가 바뀌는 경계($x=0$)에서 함숫값 같다. → 연속!

이다. 함수

$f(x)$가 연속함수일 때

$$g(x) = \int_{-4}^{x} f(t)\,dt$$

→ 정적분으로 정의된 함수

1. 대입한다. 위끝=아래끝이 되도록 → 6보. $\int_a^a f(t)dt = 0$ 이므로.

2. 미분한다. $g'(x) = f(x)$

가 $x=2$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $g(x)$의 극댓값은? [4점]

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

∴ $g(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ (단, $F(x) = \int f(x)dx$, $F'(x) = f(x)$)

→ $g'(x) = f(x)$

주의) $g(x) = \int_x^a f(t)dt = F(a) - F(x)$

→ $g'(x) = -f(x)$

if) $g(x) = \int_a^{bx+c} f(t)dt$ → $g'(x) = bf(bx+c)$ 얘는 합성함수 미분이라 못나오니 걱정 ㄴㄴ

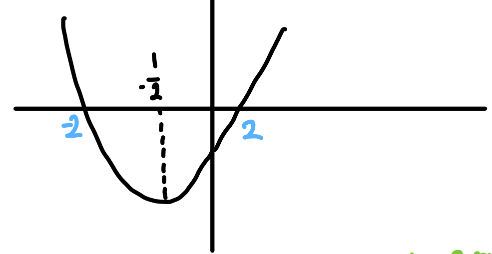
$g(x) = \int_{-4}^{x} f(t)dt$: $f(t)$(피적분함수)가 연속 ⇒ $g(x)$는 미분 가능!

∴ 미분 가능한 함수가 극값을 갖는 지점에서 항상 미분계수=0 이다. by 극값의 판정

$g'(2) = 0 = f(2)$ → $6+a=0$ 이므로 $a=-6$

극대: 미분 가능한 함수에서 도함수의 부호 ⊕ → ⊖ = 원함수의 증감 변화점

$3x^2+3x-6 = 3(x+2)(x-1)$



$x=-2$에서 극대!

t: +2 만큼 평행이동

$g(x) = \int_{-4}^{-2} f(t)dt = \int_{-4}^{-2} 3(t+2)(t-1)dt = \int_{-2}^{0} 3t(t-3)dt = \int_{-2}^{0} 3t^2-9t\,dt$

$= t^3 - \frac{9}{2}t^2 \Big|_{-2}^{0}$

$= 0 - (-8-18) = 26$

14번은 뒷장!

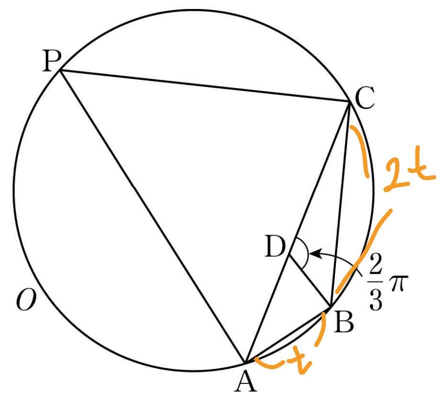
13. 그림과 같이

θ

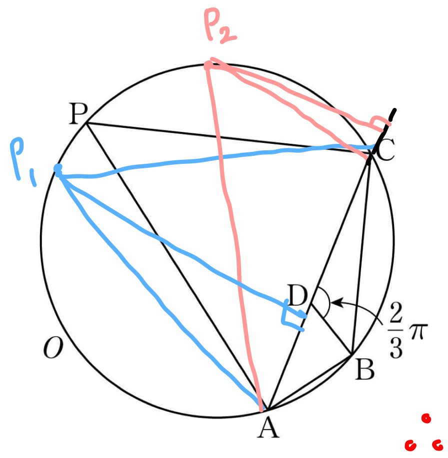
$$2\overline{AB}=\overline{BC},\quad \cos(\angle ABC)=-\frac{5}{8}$$

아래에 설명

인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, $\overline{QA}=6\sqrt{10}$이다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 $\angle CDB=\frac{2}{3}\pi$일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]



① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$



△APC의 넓이.. 점P는 호 AC위를 움직임

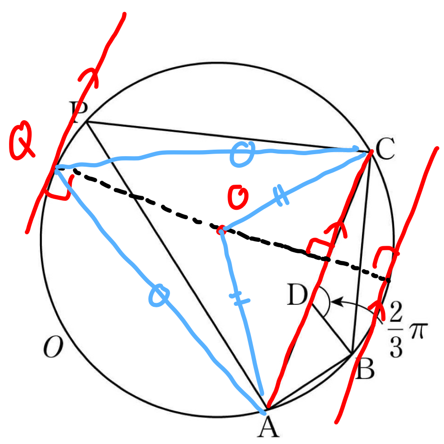
△APC의 넓이 = $\frac{1}{2}$×밑변×높이

$\overline{AC}$로 고정

이거 언제 최대?

∴ 지름의 정의 : ① 원의 중심을 지나는 직선

② 원의 할선 中 길이가 가장 긴 직선



AC와 평행한 두 접선을 이용 → 지름 작도 가능

∴ 원과 직선의 접점 → 중심에서 수선의 발 작도!

∴ $\overline{QA}=\overline{QC}$가 될 때가 △AQC넓이최대

14. 두 정수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+\frac{a^2}{4}+b^2 & (x\le 0) \\ x^3-3x^2+5 & (x>0) \end{cases}$$

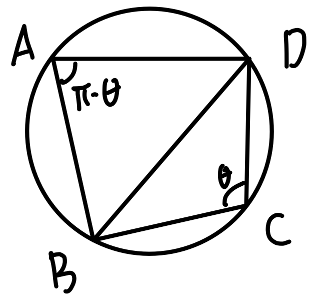
이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

원에 내접하는 사각형 : 빈출 요소! why? ① 대각의 합 = π

② 내접하는 삼각형 두개로 쪼갤 수 있다.

→ 사인 법칙 활용 ↗



△ABD의 외접원 = △BCD의 외접원

→ 외접원의 반지름 같다.

$\overline{QA}=\overline{QC}=6\sqrt{10}$ 이고, $\angle APC=\pi-\theta$

• 끼인각, 두변의 길이를 안다 → 제2코사인 법칙 활용!

$$\overline{AC}^2=360+360-2\cdot6\sqrt{10}\cdot6\sqrt{10}\cdot\cos(\pi-\theta)$$

$-\cos\theta=\frac{5}{8}$

$$=720-720\cdot\frac{5}{8}=270$$

$$\overline{AC}^2=270$$

$\overline{AB}=t$, $\overline{BC}=2t$, $\cos\theta=-\frac{5}{8}$

$$\overline{AC}^2=270=t^2+4t^2-2\cdot t\cdot 2t\cdot\cos\theta$$

$$270=5t^2+\frac{5}{2}t^2$$

$$270=\frac{15}{2}t^2 \rightarrow t^2=36,\ t=6$$

CDB외접원의 지름 = ❶

↳ 사인법칙 이용

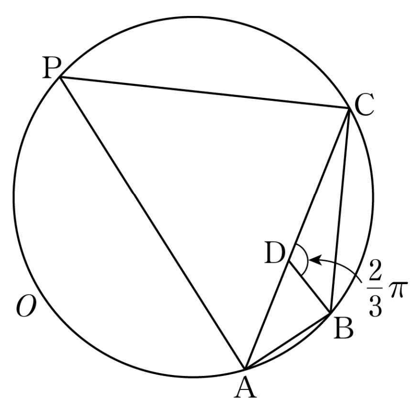
$$2R=\frac{12}{\sin\frac{2}{3}\pi}\rightarrow R=\frac{6}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{6}{\sin(\pi-\frac{\pi}{3})}=\frac{6}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$$

13. 그림과 같이

$$2\overline{AB}=\overline{BC},\quad \cos(\angle ABC)=-\frac{5}{8}$$

인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, $\overline{QA}=6\sqrt{10}$이다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 $\angle CDB=\frac{2}{3}\pi$일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]



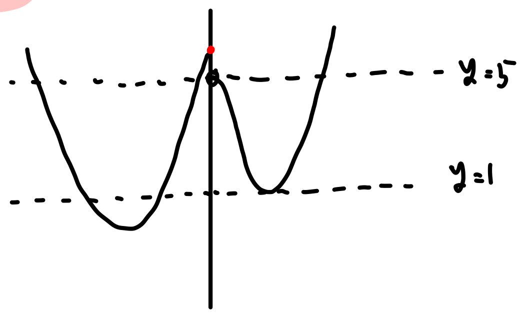
① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

a<0

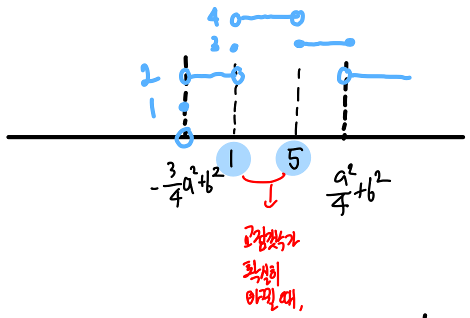
key Point: 꺾인점, 0에서 함숫값

꺾인점의 y좌표 = $-\frac{3}{4}a^2+b^2$

0에서 함숫값 = $\frac{a^2}{4}+b^2$

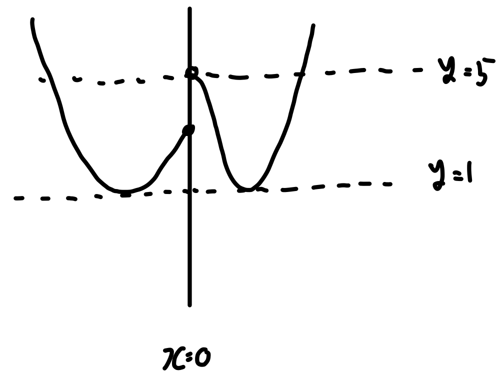


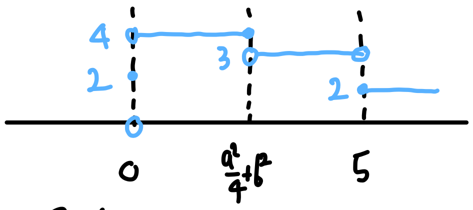
① 삼차함수의 극댓값, 극솟값에 접하지 않을 때



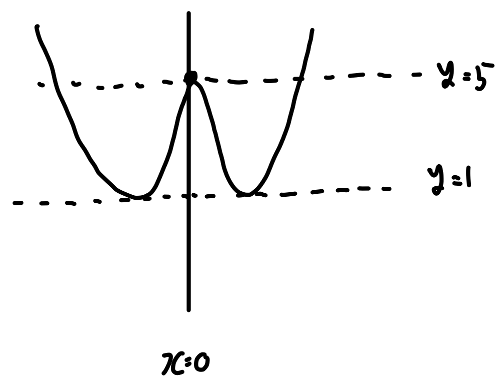
불연속점 4개!

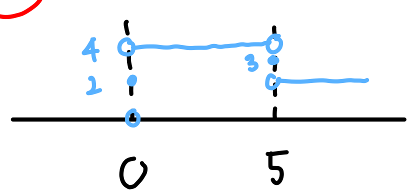
② 극소 접할 때, $f(0)\neq5$





③ 극소 접할 때, $f(0)=5$





$\frac{a^2}{4}+b^2=5$, $-\frac{3}{4}a^2+b^2=1$ $\xrightarrow{\text{빼서}}$ $a^2=4$ → $a=-2$, $b^2=4$ 이므로 $b=\pm2$ → $(-2,-2)$ $(-2,2)$ 2개

14. 두 정수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+\frac{a^2}{4}+b^2 & (x\le0) \\ x^3-3x^2+5 & (x>0) \end{cases}$$

x=a가 대칭축

$f'(x)=\begin{cases} 2x-2a=2(x-a) \\ 3x^2-6x=3x(x-2) \end{cases}$ 0에서 극대 2에서 극소

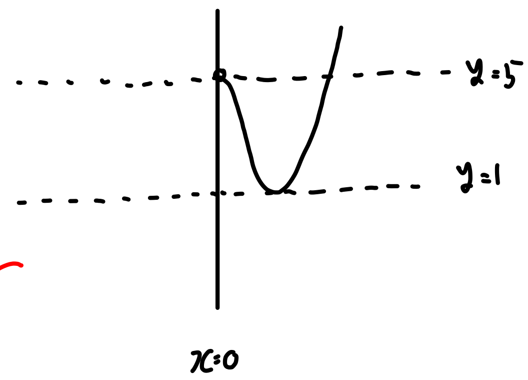
이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

→ 갯수함수의 불연속점이 2개

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

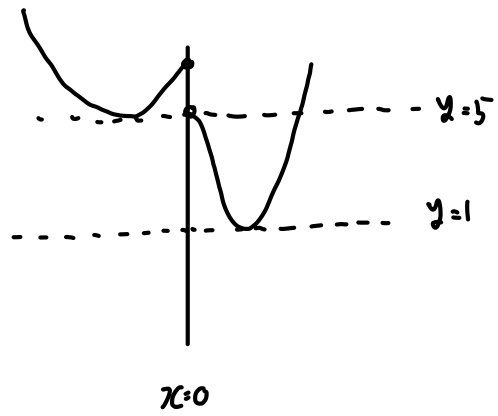
∴ 갯수함수 → 교점이 key Point.

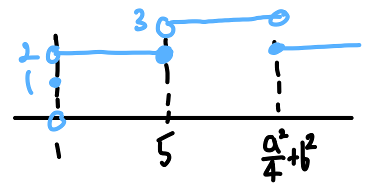
곡선과 직선의 교점의 갯수가 바뀌는 경계 ① 접할 때 ② 구간이 바뀔 때



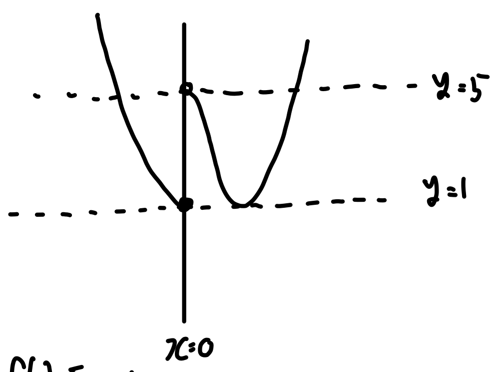
x>0에서 삼차함수는 fix!!

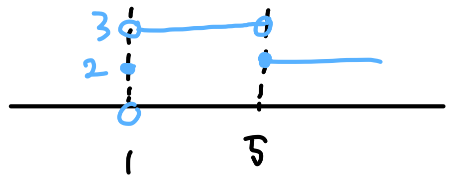
④ 극대 접할 때





a≥0 ① $f(0)=1$



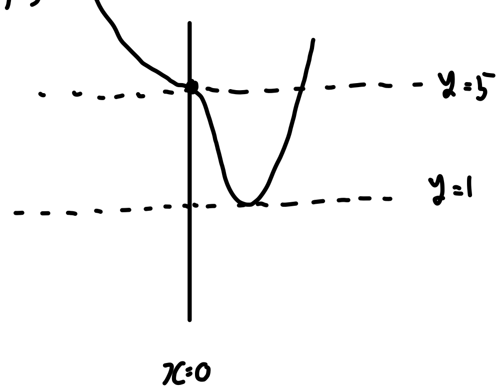


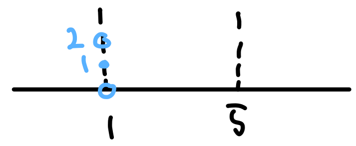
$\frac{a^2}{4}+b^2=1$

a, b가 정수이므로, $a=0$, $b=\pm1$, $a=2$, $b=0$

$(0,-1)$ $(0,1)$ $(2,0)$ 3개

② $f(0)=5$





15. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 수열→그냥 하자.

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n & (a_n>n) \\ 3n-2-a_n & (a_n\le n)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱은? [4점]

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

n=4

$a_5=5 \to a_4=5\ (a_4>4)$: $a_4=5$이므로 ok,

$10-a_4=5\ (a_4\le 4)$: $a_4=5$ 이므로 X

n=3

$a_4=5 \to a_3=5\ (a_3>3)$: $a_3=5$ 이므로 ok,

$7-a_3=5\ (a_3\le 3)$: $a_3=2$ 이므로 ok,

n=2

$a_3=5 \to a_2=5\ (a_2>2)$: $a_2=5$ 이므로 ok

$4-a_2=5\ (a_2\le 2)$: $a_2=-1$ 이므로 ok

$a_3=2 \to a_2=2\ (a_2>2)$: $a_2=2$ 이므로 X

$4-a_2=2\ (a_2\le 2)$: $a_2=2$ 이므로 ok

n=1

$a_2=5 \to a_1=5\ (a_1>1)$: $a_1=5$ 이므로 ok

$1-a_1=5\ (a_1\le 1)$: $a_1=-4$ 이므로 ok

$a_2=2 \to a_1=2\ (a_1>1)$: $a_1=2$ 이므로 ok

$1-a_1=2\ (a_1\le 1)$: $a_1=-1$ 이므로 ok

$a_2=-1 \to a_1=-1\ (a_1>1)$: $a_1=-1$ 이므로 X

$1-a_1=-1\ (a_1\le 1)$: $a_1=2$ 이므로 X

$5\cdot -4\cdot 2\cdot -1=40$

단답형

16. 방정식 $4^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-9}$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-9}$

$-2x=x-9$

$x=3$

17. $\int_0^2(3x^2-2x+3)\,dx-\int_2^0(2x+1)\,dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

$x^3-x^2+3x\Big|_0^2=8-4+6=10$

$\int_0^2 2x+1 = x^2+x\Big|_0^2=6$

16

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{9} a_k = 137,\quad \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{9} 2a_k = 101$$

일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

113

$a_{10} + 2\sum_{k=1}^{9} a_k = 137$

$a_{10} - \sum_{k=1}^{9} a_k = 101$

$3\sum_{k=1}^{9} a_k = 36$

$\sum_{k=1}^{9} a_k = 12$

$f'(x) = 3x^2 - 5x + a$

19. 실수 a에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + ax + 2$이다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(0, 2)$, $\mathrm{B}(2, f(2))$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l, m이 만나는 점이 x축 위에 있을 때, $60 \times |f(2)|$의 값을 구하시오. [3점]

$f(2) = 2a$

$f'(0) = a$

$f'(2) = 2 + a$

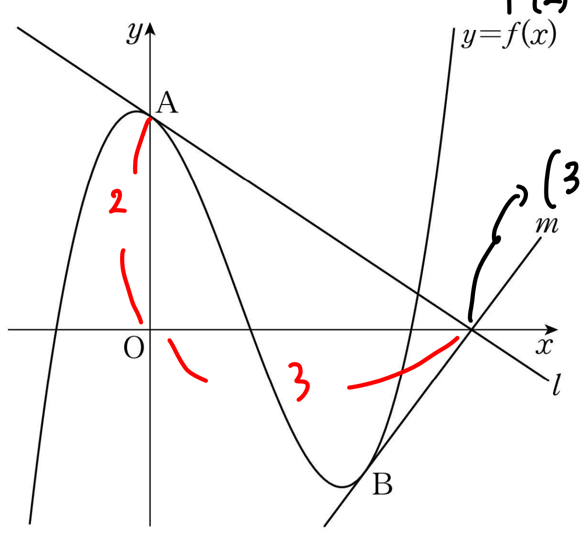
$l : y = ax + 2$

$m : y = (a+2)(x-2) + 2a$

$l = m$

$ax + 2 = ax + 2x - 4$

$x = 3$



$-a = -\frac{2}{3} \rightarrow a = \frac{2}{3}$

접선기울기

$60 \cdot |f(2)| = 60 \cdot \left|-\frac{4}{3}\right| = 80$

20. 두 함수 $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$, $g(x) = \cos\frac{\pi}{3}x$에 대하여 $0 \le x < 12$에서 방정식

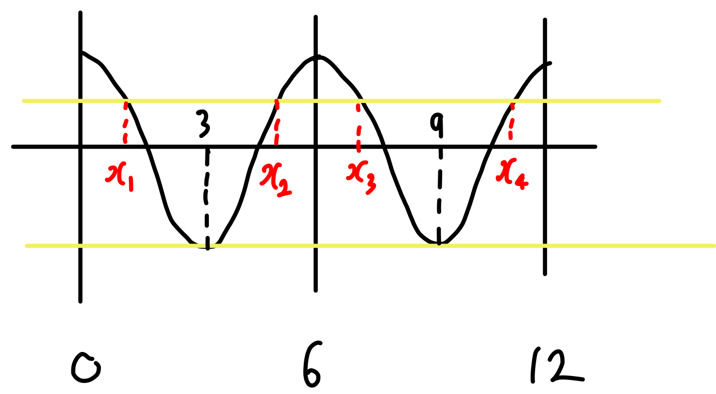
$$f(g(x)) = g(x)$$

알려진 함수 g(x)가 반복 → 치환!

를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합을 구하시오. [4점]

$g(x) = \cos\frac{\pi}{3}x$: $\cos x$의 x좌표를 $\frac{3}{\pi}$배 → 특징차 $= \frac{\pi}{2} \times \frac{3}{\pi} = \frac{3}{2}$

주기 $= 2\pi \times \frac{3}{\pi} = 6$



$g(x) = t$ (치) $-1 \le \cos\frac{\pi}{3}x \le 1 \rightarrow -1 \le t \le 1$

$f(t) = t \rightarrow 2t^2 + 2t - 1 = t \rightarrow 2t^2 + t - 1 = 0$

$(2t-1)(t+1) = 0$

$t = \frac{1}{2}, -1 \rightarrow \cos\frac{\pi}{3}x = \frac{1}{2}, -1$일 때

함숫값 같은 점 → 극대/극소인 특징점 기준 대칭

$x_1 + x_2 = 2 \cdot 3 = 6$

$x_3 + x_4 = 2 \cdot 9 = 18$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3 + 9 = 6 + 18 + 3 + 9 = 36$

22번은 뒷장에

역함수 대칭점!

21. $a>2$인 실수 a에 대하여 기울기가 -1인 직선이 두 곡선

$f(x) =$ $y=a^x+2$, $\underset{g(x)}{y}=\log_a x+2$ 지수함수와 로그함수가 동시에 등장 → 역함수 의심.

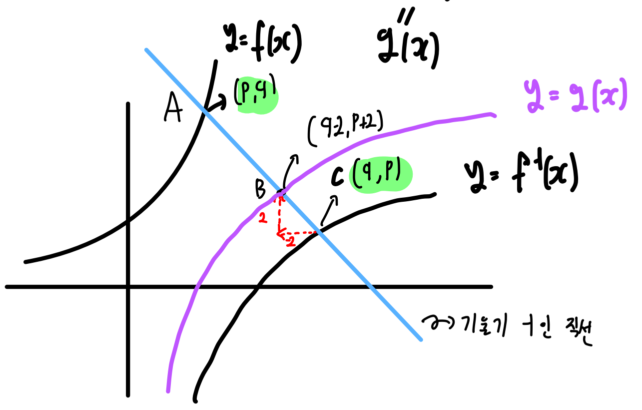
와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심의 y좌표가 $\frac{19}{2}$이고 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$일 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]

이 둘 역함수인가? 봅시다.

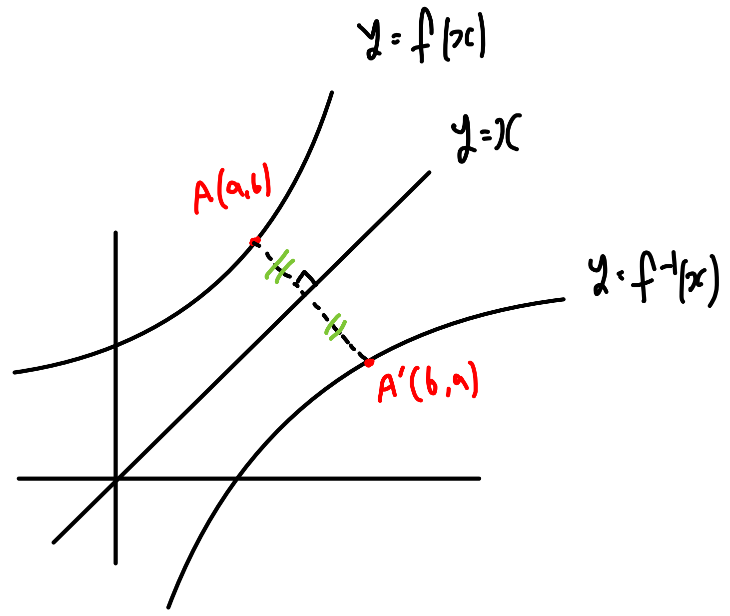
$f(x)=y=a^x+2 \Leftrightarrow x=a^y+2 \rightarrow x-2=a^y \rightarrow y=\log_a(x-2)=f^{-1}(x)$

에잉 역함수는 아닌데..! $y=\log_a x+2$ 는 $y=a^x+2$의 역함수기를 $x:-2$, $y:2$ 평행이동!

↳ 기울기 -1인 직선 상에서 움직임!



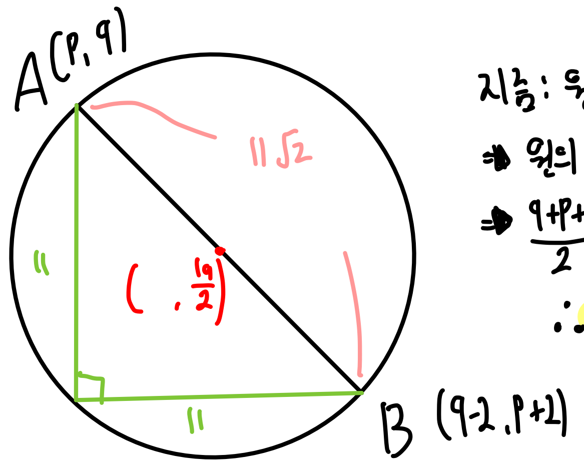
A와 C는 대칭점! →



대칭점: $y=x$에 대해 대칭한 점.

$y=x$에 수직인 직선상에 A와 A'이 존재해야하므로

↳ 기울기 곱=-1 이므로, 기울기가 -1인 직선!



지름: 원의 중심을 지나는 직선

⇒ 원의 중심은 점 A, B의 중점

⇒ $\frac{q+p+2}{2}=\frac{19}{2}$

$\therefore q+p=17$

원의 넓이 $=\pi r^2=\frac{121}{2}\pi \Rightarrow r=\frac{11}{\sqrt{2}}$, 원의 지름 $=2r=11\sqrt{2}$

직선 AB는 기울기가 -1인 직선이므로, 직각이등변삼각형의 빗변이 됨.

밑변의 길이 $=B_x-A_x$
높이 $=A_y-B_y$] 아무거나 ok ⇒ $q-2-p=11$

$\therefore q-p=13$

$$\begin{array}{r} q+p=17 \\ +\ \ q-p=13 \\ \hline q=15,\ p=2 \end{array}$$

A의 좌표: $(2, 15)$, A는 $y=a^x+2$ 위의 점

$15=a^2+2$

$a^2=13$

22. 함수 $f(x)=|x^3-3x+8|$과 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta=m+n\sqrt{6}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이다.) [4점]

* 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

21. $a>2$인 실수 a에 대하여 기울기가 -1인 직선이 두 곡선

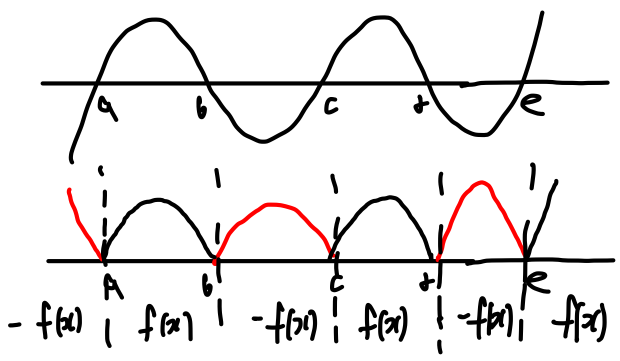
$$y=a^x+2,\quad y=\log_a x+2$$

와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심의 y좌표가 $\frac{19}{2}$이고 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$일 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]

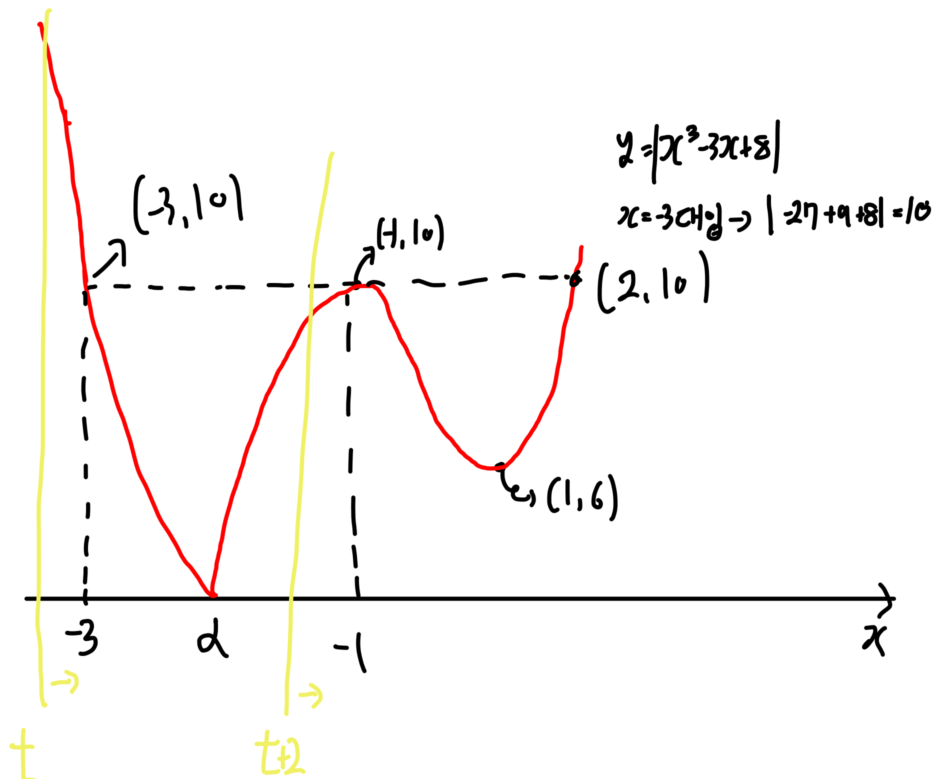
절댓값 함수: 알맹이 함수가 x축 아래 있는 부분을 뒤집어 올려주자!

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & (f(x)\geq 0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$

↳ $f(x)$를 x축에 대하여 대칭시킨 함수



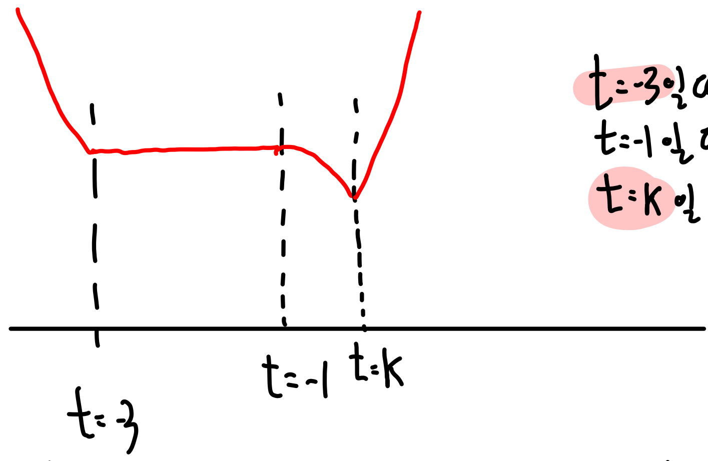
$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x+8 & (x\geq\alpha) \\ -x^3+3x-8 & (x<\alpha) \end{cases}$$



↳ 요 [t,t+2] 구간을 움직이며 관찰!

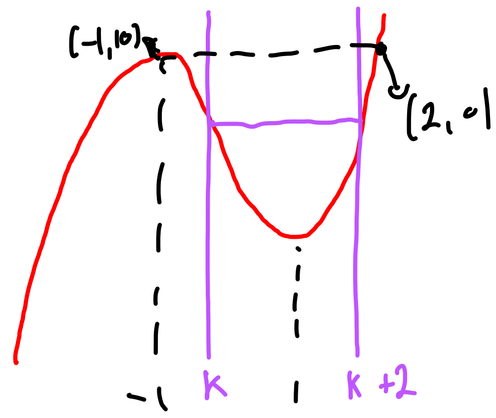
22. 함수 $f(x)=|x^3-3x+8|$과 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta=m+n\sqrt{6}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이다.) [4점]

구간 size가 2인 구간 내에서 최댓값 $=g(t)$



$t=-3$일 때: 미분 X
$t=-1$일 때: 미분 O
$t=k$일 때: 미분 X

- $t\leq -3$ 일 때, $f(t)$가 최댓값으로 계속 갱신됨.
- $-3<t\leq -1$ 일 때는, $f(-1)$이 최댓값으로 지속이 됨.
- $t>-1$ 일 때는 $f(t)$가 최댓값으로 계속 갱신됨.



$f(t)=f(t+2)$가 되는 t를 k라 한다면,

- $-1<t\leq k$ 일 때는 $f(t)$가 최댓값으로 계속 갱신됨.
- $k<t$ 일 때는 $f(t+2)$가 최댓값으로 계속 갱신됨.

$f(k)=f(k+2)$인 k를 찾자.

$f(x)=x^3-3x+8=x(x^2-3)+8$

$f(k)=k\cdot(k^2-3)+8=k^3-3k+8$

$f(k+2)=(k+2)(k^2+4k+1)+8=k^3+6k^2+9k+10$

$\Rightarrow 6k^2+12k+2=0$

$k=\dfrac{-12\pm\sqrt{144-48}}{12}=-1\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{12}=-1\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow k=-1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\alpha=-3,\ \beta=-1+\dfrac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha\beta=3-\sqrt{6}$

$m=3,\ n=-1$

$m+n=2$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_{3}\mathrm{H}_{3}$의 값은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

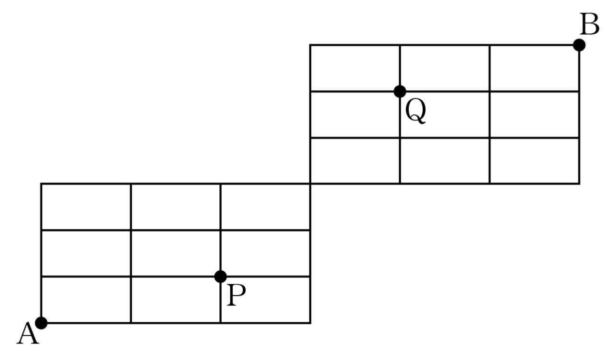
24. 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수 중 홀수의 개수는? [3점]

① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

25. 남학생 5명, 여학생 2명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 여학생끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

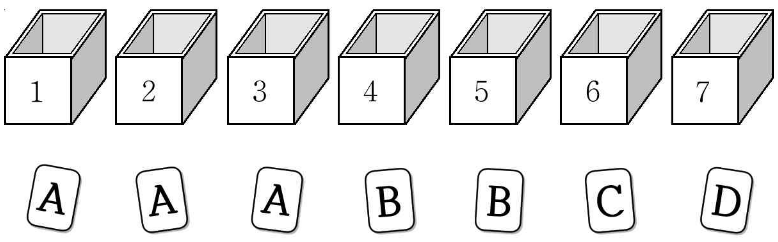
① 200 ② 240 ③ 280 ④ 320 ⑤ 360

26. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 갈 때, P 지점을 지나면서 Q 지점을 지나지 않는 경우의 수는? [3점]



① 72 ② 81 ③ 90 ④ 99 ⑤ 108

27. 그림과 같이 문자 A, A, A, B, B, C, D가 각각 하나씩 적혀 있는 7장의 카드와 1부터 7까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 7개의 빈 상자가 있다.



각 상자에 한 장의 카드만 들어가도록 7장의 카드를 나누어 넣을 때, 문자 A가 적혀 있는 카드가 들어간 3개의 상자에 적힌 수의 합이 홀수가 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 144 ② 168 ③ 192 ④ 216 ⑤ 240

28. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [4점]

(가) $ab^2c = 720$
(나) a와 c는 서로소가 아니다.

① 38 ② 42 ③ 46 ④ 50 ⑤ 54

단답형

29. 세 명의 학생에게 서로 다른 종류의 초콜릿 3개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

> (가) 적어도 한 명의 학생은 초콜릿을 받지 못한다.
> (나) 각 학생이 받는 초콜릿의 개수와 사탕의 개수의 합은 2 이상이다.

30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(1) \le f(2) \le f(3)$
> (나) $1 < f(5) < f(4)$
> (다) $f(a)=b$, $f(b)=a$를 만족시키는 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b가 존재한다.

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{2^n-3^n}$ 의 값은? [2점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n+b_n}{1+2b_n}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n+3 < a_n < 2n+4$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+1)^2+6n^2}{na_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n = a_1+2$$

를 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{a_n-n+1}=3$일 때, a_{10}의 값은? (단, $a_1>0$) [3점]

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

27. $a_1=3$, $a_2=6$인 등차수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(b_k)^2 = n^3 - n + 3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n b_{2n}}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 6

28. 자연수 n에 대하여 직선 $y=2nx$가 곡선 $y=x^2+n^2-1$과 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 원 $(x-2)^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{P}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 P_n이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{P}_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$의 값은? [4점]

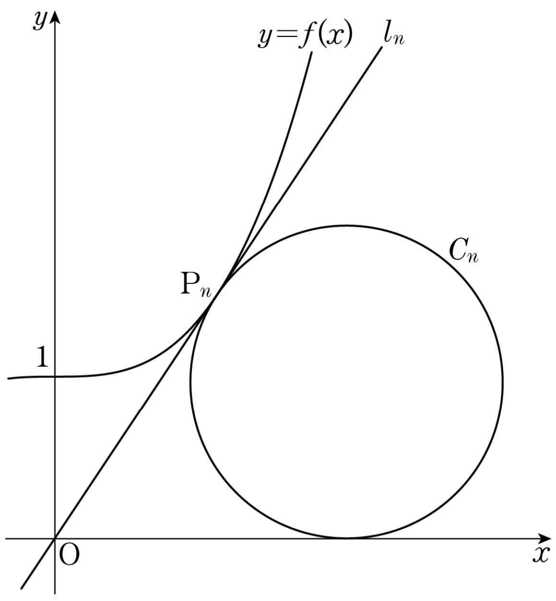
① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

단답형

29. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\frac{4}{n^3}x^3+1$$

이라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 l_n, 접선 l_n의 접점을 P_n이라 하자. x축과 직선 l_n에 동시에 접하고 점 P_n을 지나는 원 중 중심의 x좌표가 양수인 것을 C_n이라 하자. 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $40\times\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)$의 값을 구하시오. [4점]



30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 자연수 m에 대하여 구간 $(0,\infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)\left(\frac{x}{m}\right)^n+x}{\left(\frac{x}{m}\right)^n+1}$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하고, $g'(m+1)\le 0$이다.
(나) $g(k)g(k+1)=0$을 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.
(다) $g(l)\ge g(l+1)$을 만족시키는 자연수 l의 개수는 3이다.

$g(12)$의 값을 구하시오. [4점]

*** 확인 사항**

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 타원 $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점 사이의 거리는? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

24. 초점이 F인 포물선 $y^2=20x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=15$일 때, 점 P의 x좌표는? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

25. 두 초점이 x축 위에 있고, 두 초점 사이의 거리가 30인 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=\frac{3}{4}x$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

26. 두 실수 a, b에 대하여 포물선

$$C:(y-a+1)^2=(a+b)x+1 \text{ (단, } a+b\neq 0)$$

이 있다. 포물선 C가 원점을 지나고 초점과 준선 사이의 거리가 2일 때, $a-b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [3점]

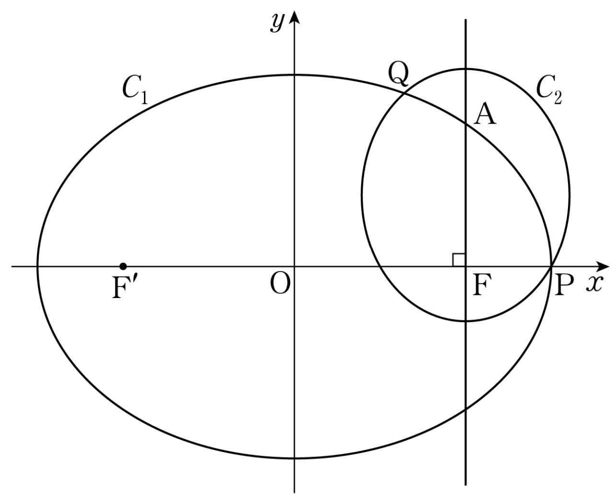
① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

27. 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=-1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 각 FPF′의 이등분선이 점 $(0, 1)$을 지날 때, $\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{F'P}}$의 값은? [3점]

① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 40

28. 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$ $(c>0)$이고 장축의 길이가 18인 타원을 C_1이라 하자. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 타원 C_1과 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하고, 두 초점이 F, A이고 점 $\mathrm{P}(9, 0)$을 지나는 타원을 C_2라 하자. 두 타원 C_1과 C_2가 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 하자.
$\cos(\angle \mathrm{FF'A})=\frac{12}{13}$일 때, $\overline{\mathrm{F'Q}}-\overline{\mathrm{AQ}}$의 값은? [4점]

① $14-\sqrt{34}$ ② $20-2\sqrt{34}$ ③ $15-\sqrt{34}$
④ $21-2\sqrt{34}$ ⑤ $16-\sqrt{34}$



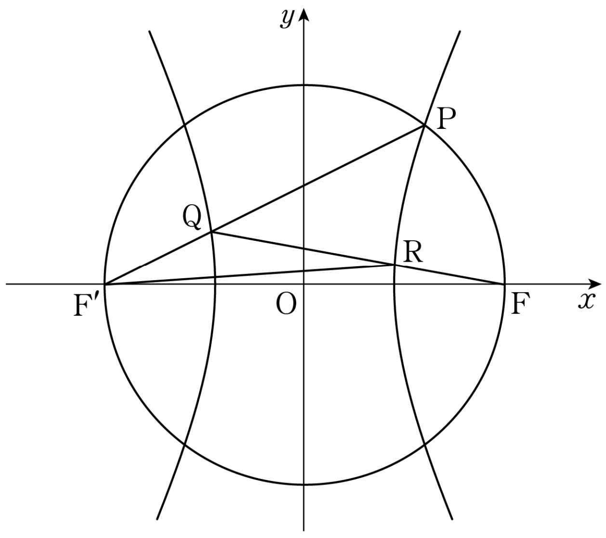
단답형

29. 포물선 $x^2 = ay\,(a>0)$이 두 포물선

$$C_1 : y^2 = 8x\,,\quad C_2 : y^2 = -x$$

와 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 각각 P, Q라 하고, 두 포물선 C_1, C_2의 초점을 각각 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$라 하자. 직선 PQ의 기울기가 $2\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{F_1P}}+\overline{\mathrm{F_2Q}}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\,0)$, $\mathrm{F'}(-c,\,0)\,(c>0)$을 초점으로 하고 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선이 선분 FF′을 지름으로 하는 원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 선분 F′P가 쌍곡선과 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 하고, 선분 FQ가 쌍곡선과 만나는 점 중 점 Q가 아닌 점을 R이라 하자. 점 Q가 선분 F′P를 $1:2$로 내분할 때, 삼각형 QF′R의 넓이를 S라 하자. $20S$의 값을 구하시오. [4점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.