2회 정답표

1	②	11	②	21	②
2	②	12	⑤	22	12
3	③	13	③	23	60
4	③	14	①	24	48
5	①	15	①	25	14
6	④	16	⑤	26	18
7	④	17	③	27	20
8	②	18	①	28	38
9	④	19	⑤	29	34
10	②	20	⑤	30	86

1. 로그

$\log_2 6 + \log_2 \frac{8}{3} = \log_2 16 = 4$

2. 행렬의 연산

$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & a+1 \end{pmatrix}$이므로 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합은 $a+7$이고, 따라서 $a=2$입니다.

3. 독립시행의 확률

한 개의 동전을 4번 던져 앞면이 2번 나올 확률은 ${}_4\mathrm{C}_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$입니다.

4. 행렬과 그래프

그래프 G를 나타내는 행렬이 5차 정사각행렬이므로 꼭짓점의 개수는 5이고, 그래프를 나타내는 행렬의 m행 n열의 성분과 n행 m열의 성분은 같기에 $a=1$, $b=0$, $c=1$이므로 그래프 G의 변의 개수는 $a+c+3=b+5=5$입니다. 따라서 그래프의 개수와 꼭짓점의 개수의 합은 10입니다.

5. 수열의 극한

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+1-\sqrt{n^2+n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+1+\sqrt{n^2+n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

6. 미분계수의 도함수

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$이므로

$f'(x)=3x^2+6x-2$에서 $f'(1)=7$입니다.

7. 정적분

$\int_{-1}^{1}(3x^2+2x+a)dx = \left[x^3+x^2+ax\right]_{-1}^{1}$

$=2+2a=10$에서 $a=4$입니다.

8. 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위해서는 $x=1$에서 연속이어야 합니다. 따라서 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$에서 $\lim_{x\to 1-0}f(x)=1+a$이고, $\lim_{x\to 1+0}f(x)=f(1)=3$이므로 $1+a=3$에서 $a=2$입니다.

9. 이항분포

확률변수 X의 분산은 $72\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=16$이므로 확률변수 X의 표준편차는 $\sqrt{16}=4$입니다. 따라서 확률변수 $2X+3$의 표준편차는 $\sigma(2X+3)$ $=2\sigma(X)=8$입니다.

10. 로그

$M=\log A+3\log 8t-2.9$에서 $A=6$, $t=8$을 대입하면 $M_1=\log 6+3\log 64-2.9$입니다. 다시 주어진 식에 $A=30$, $t=16$을 대입하면 $M_2=\log 30+3\log 128-2.9$입니다. 따라서 $M_2-M_1=\log 5+3\log 2=\log 40=1+2\log 2$ $=1+0.6=1.6$입니다.

11. 함수의 극한

$\lim_{x\to -1-0}f(x)+\lim_{x\to 1+0}f(x)=-1+2=1$

12. 확률의 덧셈정리

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$입니다. 따라서 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)$ $=\frac{1}{3}$이고, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{2}\mathrm{P}(A)=\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ $=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-0=\frac{5}{6}$입니다.

13. 지수함수

점 A의 좌표는 $(0, 1)$이고, 점 B의 좌표는 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$입니다. 한편, 방정식 $2^x=2^{x-1}+2$에서 $2^{x-1}=2$이므로 $x=2$입니다. 따라서 점 C의 좌표는 $(2, 4)$입니다. 그러므로 삼각형 ABC의 넓이는 $\left(\frac{5}{2}-1\right)\times 2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$입니다.

14. 여러 가지 수열

자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표는 $(n, 2^n)$이고, 점 Q_n의 좌표는 $(n, 2^{n-1}+2)$입니다. 그런데 $n<2$이면 $2^n<2^{n-1}+2$, $n=2$이면 $2^n=2^{n-1}+2$이고, $n>2$이면 $2^n>2^{n-1}+2$입니다. 따라서 $\sum_{n=1}^{7}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=(-2^0+2)+\sum_{n=2}^{7}(2^{n-1}-2)$입니다.

그러므로 $\sum_{n=1}^{7}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$의 값을 계산하면

$1+\sum_{n=2}^{7}(2^{n-1}-2)=1+2^7-2-12=115$입니다.

15. 이산확률변수

상자에서 꺼낸 두 공에 적힌 숫자의 합이 2일 확률은 $\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$, 상자에서 꺼낸 두 공에 적힌 숫자의 합이 3일 확률은 $\frac{2\times 1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{6}$, 상자에서 꺼낸 두 공에 적힌 숫자의 합이 4일 확률은 $\frac{2\times 1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{6}$이고, 상자에서 꺼낸 두 공에 적힌 숫자의 합이 5일 확률은 $\frac{1\times 1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$이므로 확률변수 X의 확률분포표를 완성하면 다음과 같습니다.

X	2	3	4	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X)=\frac{2}{6}+\frac{6}{6}+\frac{8}{6}+\frac{5}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$ 입니다.

16. 정적분

$\int_{-1}^{1}f(t)dt=a$라 하면 $f(x)=x^2-2ax+a$이고, $f(1)=1-a$이므로 a의 값을 구하면 됩니다.

$a=\left[\frac{1}{3}t^3-at^2+at\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}+2a$이므로

$a=-\frac{2}{3}$입니다. 따라서 $f(1)=1-a=\frac{5}{3}$입니다.

17. 점화식

$S_{n+1}=\frac{1}{n+1}S_n$이므로

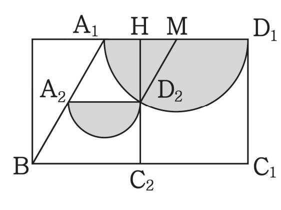
$S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\times\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\cdots\times\frac{S_3}{S_2}\times\frac{S_2}{S_1}\times S_1$에서

$S_n=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}\times 2$이므로

$S_n=\frac{2}{n!}$입니다. 따라서 (가)에 들어갈 식은 $\frac{2}{n!}$이고, n이 2 이상의 자연수일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2}{n!}-\frac{2}{(n-1)!}=\frac{2-2n}{n!}$이므로 (나)에 들어갈 식은 $\frac{2-2n}{n!}$입니다. 따라서 $\frac{g(7)}{f(8)}=\frac{8!}{2}\times\frac{-12}{7!}=-48$입니다.

18. 무한등비급수의 활용

$S_1=1\times 1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$입니다.



$\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1}=\sqrt{3}$이므로 S_n의 공비를 r이라 할 때, 그림에서 $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}}=2r$, $\overline{\mathrm{BC}_2}=3r$, $\overline{\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2}=\sqrt{3}r$,

$\overline{A_2D_2} = 2r$입니다. 그림에서 점 A_1과 점 D_1의 중점을 M이라 할 때, $\overline{MD_2} = 1$입니다. 그림에 있는 직각삼각형 D_2MH에서

$\overline{HD_2} = \sqrt{3} - \sqrt{3}r$이고, $\overline{HM} = 2 - 3r$입니다. 피타고라스의 정리에 의해 등식 $(2-3r)^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{3}r)^2 = 1$에서 식을 정리하면 $12r^2 - 18r + 6 = 0$이고, 인수분해하면 $6(2r-1)(r-1) = 0$이므로 $r = 1$ 또는 $r = \frac{1}{2}$인데, 문제에서 사다리꼴 $A_2BC_2D_2$의 꼭짓점은 선분 A_1B, 선분 BC_1과 호 A_1D_1의 양 끝에 있을 수 없으므로 (사다리꼴의 꼭짓점이 선분 A_1B, 선분 BC_1과 호 A_1D_1의 양 끝에 있게 되면 $S_1 = S_2$이므로 $r = 1$) $r < 1$입니다. 따라서

$r = \frac{1}{2}$이고, $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}\pi$입니다.

19. 역행렬

ㄱ. $AB^2 + A = 2E$에서 $A(B^2+E) = 2E$이므로 A의 역행렬은 $\frac{1}{2}(B^2+E)$입니다.
$A^2B + 2A = O$에서 양변에 A의 역행렬을 곱하면 $AB + 2E = O$이고, $AB = -2E$이므로 B의 역행렬은 $-\frac{1}{2}A$입니다. 따라서 A와 B의 역행렬이 모두 존재합니다. **(참)**

ㄴ. $A(B^2+E) = 2E$이고, $A(-B) = 2E$이므로, $B^2 + B + E = O$입니다. **(참)**

ㄷ. $B^2 + B + E = O$의 양변에 B의 역행렬을 곱하면 $B + E + B^{-1} = O$이며,
$B^{-1} = -\frac{1}{2}A$이므로 $A = 2B + 2E$입니다.
따라서 $A - 2B = 2E$이고, 양변을 제곱하면
$A^2 - 2AB - 2BA + 4B^2 = 4E$입니다.
$AB = -2E$이므로 $AB = BA$이고, 따라서
$A^2 + 4B^2 = 4AB + 4E$에서
$A^2 + 4B^2 = -4E$입니다. **(참)**

20. 모평균의 추정

$\mathrm{P}(-c \le Z \le c) = \frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 $\alpha\%$의 신뢰구간은

$\left[\overline{x} - \frac{2}{\sqrt{16}}c,\ \overline{x} + \frac{2}{\sqrt{16}}c\right]$에서 $c = 2b$입니다.
문제에서 막대과자 1개의 길이는 표준편차가 2인 정규분포를 따르므로 막대과자 1개의 길이가 $m + 2b$ 이상일 확률은 $\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{m+2b-m}{2}\right)$
$= \mathrm{P}(Z \ge b) = 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le b) = 0.179$에서
$\mathrm{P}(0 \le Z \le b) = 0.321$이므로 $b = 0.92$입니다.
따라서 $c = 2b = 1.84$이며 표에서
$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.84) = 0.467$입니다. 따라서
$\mathrm{P}(-1.84 \le Z \le 1.84) = 2 \times 0.467 = 0.934$
$= \frac{\alpha}{100}$이고, $\alpha = 93.4$입니다.

21. 도함수의 활용

n이 자연수일 때, 함수 $y = x^3 - nx^2 + 3n$에 대하여 $y' = 3x^2 - 2nx$이므로 $3x^2 - 2nx = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = \frac{2}{3}n$입니다. 따라서 함수 $y = x^3 - nx^2 + 3n$은 $x = 0$에서 극댓값을 갖고, $x = \frac{2}{3}n$에서 극솟값을 갖습니다. 따라서 함수 $f(x) = |x^3 - nx^2 + 3n|$은 n의 값에 관계없이 어떤 음수 a에 대하여 $x = a$에서 극솟값을 갖고, $f(0) = 3n > 0$이므로 $x = 0$에서 극댓값을 갖습니다. $(*)$ 한편, $f\left(\frac{2}{3}n\right) = -\frac{4}{27}n^3 + 3n$의 값이 0이 될 때를 기준으로 함수 $f(x) = |x^3 - nx^2 + 3n|$이 가지는 극값의 개수가 달라지므로 함수 $f(x)$의 그래프를 그린 후 n의 값에 따라 나누어 생각합니다.

1) $f\left(\frac{2}{3}n\right) = -\frac{4}{27}n^3 + 3n$의 값이 0 이상일 경우, 함수 $f(x) = |x^3 - nx^2 + 3n|$은 $x = \frac{2}{3}n$에서 극솟값 $-\frac{4}{27}n^3 + 3n$을 가집니다. 따라서 함수 $f(x)$는 $(*)$에 의해 서로 다른 두 점에서 극솟값을 가지며, 방정식 $f(x) = f(n) = 3n$의 실근의 개수는 3이므로 (가) 조건을 만족시키지 않습니다.

2) $f\left(\frac{2}{3}n\right) = -\frac{4}{27}n^3 + 3n$의 값이 0보다 작을 경우 함수 $f(x) = |x^3 - nx^2 + 3n|$은 어떤 양수 b, c에 대하여 $x = b$, $x = c$에서 극솟값을 가지고, $x = \frac{2}{3}n$에서 극댓값 $\frac{4}{27}n^3 - 3n$을 가집니다. 따라서 함수 $f(x)$는 $(*)$에 의하여 서로 다른 세 점에서 극솟값을 가지며, 방정식 $f(x) = f(n) = 3n$의 실근은 $\frac{4}{27}n^3 - 3n < 3n$일 때 3개, $\frac{4}{27}n^3 - 3n = 3n$일 때 4개, $\frac{4}{27}n^3 - 3n > 3n$일 때 5개이므로 방정식 $f(x) = f(n)$의 실근의 개수가 3이기 위해서는 $\frac{4}{27}n^3 - 3n < 3n$이어야 합니다.

1), 2)에 의해 $-\frac{4}{27}n^3 + 3n < 0$에서 $n^2 > \frac{81}{4}$이고, $\frac{4}{27}n^3 - 3n < 3n$에서 $\frac{4}{27}n^3 < 6n$, $n^2 < \frac{81}{2}$이므로 가능한 자연수 n의 값은 5 또는 6의 2개입니다.

22. 함수의 극한

$\lim_{x\to 0}(x-3)(x-4) = (-3)(-4) = 12$

23. 이항정리

$\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은 ${}_6\mathrm{C}_r\, 2^{6-r}x^{12-3r}$인데, 여기에 $r = 4$를 대입하면 $15 \times 4 = 60$입니다.

24. 등비수열

등비수열 a_n의 첫째항을 a, 공비를 r이라 할 때 $ar = 3$, $\frac{ar^3}{ar^2} = 2$에서 $r = 2$이고, $a = \frac{3}{2}$이므로 $a_6 = ar^5 = 32 \times \frac{3}{2} = 48$입니다.

25. 무한급수

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{6n}{n+2}\right)$이 수렴하므로
$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{6n}{n+2}\right) = 0$에서 $\lim_{n\to\infty} a_n = 6$입니다.
따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{8n}{n+1}\right)$
$= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}\frac{8n}{n+1} = 6 + 8 = 14$입니다.

26. 역행렬과 연립일차방정식

$\begin{pmatrix} a-1 & 4 \\ a+2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서
$\begin{pmatrix} a-1 & 4 \\ a+2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$이고, 이항하면
$\begin{pmatrix} a-2 & 4 \\ a+2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$입니다. 행렬 $\begin{pmatrix} a-2 & 4 \\ a+2 & 5 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로
$5a - 10 = 4a + 8$이고, $a = 18$입니다.

27. 도함수의 활용

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수이므로 실수 전체의 집합에서 증가하기 위해서는 $f'(x) \ge 0$이어야 합니다. 이때, $f'(x)$는 이차함수이므로 $f'(x)$의 판별식이 항상 0 이하여야 합니다. $f'(x) = 3x^2 + 2x + a$이므로 판별식 $\frac{D}{4} = 1 - 3a \le 0$에서 $a \ge \frac{1}{3}$입니다.
따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이고, $p = \frac{1}{3}$이므로 $60p = 20$입니다.

28. 여러 가지 수열

(가)에서 $a_{n+1} - a_n = 2n + 4$이므로
$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+4) = n^2 + 3n - 4 + a_1$입니다.
따라서 (나)에서 $a_2 + a_3 = 6 + a_1 + 14 + a_1$
$= 20 + 2a_1$이므로 $20 + 2a_1 = 24$에서
$a_1 = 2$입니다. 그러므로 $a_n = n^2 + 3n - 2$에서
$a_5 = 25 + 15 - 2 = 38$입니다.

29. 정적분의 활용

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$에서 $f'(1) = 2$이므로 함수 $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ 위의 점 $(1, -1)$에서의 접선의 방정식은 $y = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$입니다. 교점을 찾기 위해 $x^3 - x^2 + x - 2 = 2x - 3$에서 이항하면 $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$이므로 함수 $f(x)$ 위의 점 $(1, -1)$에서의 접선과 함수 $f(x)$는 $x = 1$과 $x = -1$에서 만납니다.

$-1 \le x \le 1$에서 $x^3 - x^2 + x - 2 \ge 2x - 3$이므로

구하는 넓이는 $\int_{-1}^{1}(x^3 - x^2 - x + 1)dx = \frac{4}{3}$

입니다. 따라서 $p = 3$, $q = 4$이므로

$10p + q = 30 + 4 = 34$입니다.

30. 로그함수

$b = \log_2(a+m)$에서 a는 음이 아닌 정수이고 m은 자연수이므로 $a + m > 0$이고, $2^b = a + m$입니다. 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 (a, b)의 값 가운데 $b \ge a^2$인 점을 m의 값이 작은 순서에 따라 a축과 b축이 있는 좌표평면에 나열하면 다음과 같습니다. (즉, $b = \log_2(a+m)$이 m의 값에 따라 좌표평면에서 지나는 점을 표시한 것으로 수식을 직접 이용하거나 좌표평면에 직접 $b = a^2$과 a좌표와 b좌표가 모두 정수인 점을 표시하면서 $b = \log_2 a$를 a축 방향으로 m 또는 n만큼 평행이동시키는 방법으로 나타낼 수 있습니다.)

$m = 1$일 때 $(0, 0)$과 $(1, 1)$, $m = 2$일 때 $(0, 1)$,
$m = 3$일 때 $(1, 2)$, $m = 4$일 때 $(0, 2)$,
$m = 7$일 때 $(1, 3)$, $m = 8$일 때 $(0, 3)$,
$m = 14$일 때 $(2, 4)$, $m = 15$일 때 $(1, 4)$,
$m = 16$일 때 $(0, 4)$, $m = 30$일 때 $(2, 5)$,
$m = 31$일 때 $(1, 5)$, $m = 32$일 때 $(0, 5)$,
$m = 62$일 때 $(2, 6)$, $m = 63$일 때 $(1, 6)$,
$m = 64$일 때 $(0, 6)$, $m = 126$일 때 $(2, 7)$

등이 있습니다. 따라서 $b \ge a^2$이고, 부등식 $\log_2(a+m) \le b \le \log_2(a+n)$에 포함되는 영역에서 a좌표와 b좌표가 모두 음이 아닌 정수인 점이 10개가 되기 위해서는 두 자연수 a, b에 대하여 $m = a$에 해당하는 좌표와 $n = b$에 해당하는 좌표를 위에서 대응시킨 점 사이에 있는 정수인 점의 개수가 10개이면 됩니다. 따라서
$m < n \le 100$일 때, $m = 1$이면 $n = 16 \sim 29$,
$m = 2$이면 $n = 31$, $m = 3$이면 $n = 32 \sim 61$,
$m = 4$이면 $n = 62$, $m = 5 \sim 7$이면 $n = 63$,
$m = 8$이면 $n = 64 \sim 100$입니다.

그러므로 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수는 $14 + 1 + 30 + 1 + 3 + 37 = 86$개입니다.

3회 정답표