SEASON 2024

9 주차

극한과 연속에 대한 생각

SEOL:NAME THE SIGNATURE

설레임

테마별 기출분석집

설레임 모의고사
Team SeolName

09 극한과 연속에 대한 생각

극한식이 나왔을 때의 기본 원칙, 항상 잊지 말아야 할 한 가지.

STYLE 01

다항함수를 어떻게 구해야하지? : 문제에 힌트가 있다!

[수학Ⅱ] 문제를 풀다보면 극한값과 함수의 여러 가지 성질을 이용해서 푸는 문제를 자주 볼 수 있을거야.
이런 문제들은 조건들을 하나하나 해석하다보면 원하는 함수를 구할 수 있어.
하지만, 눈에 바로 보이는 조건 외에 문제를 읽으면서 자연스럽게 지나갈 수도 있는 조건이 있어.
여기서 스탑! [수학Ⅱ]에서 나오는 대부분의 함수는 **다항함수**를 베이스로 하여 다룬다는 것을 기억해두자!

[2022학년도 10월 전국연합학력평가 20번]

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)-1|}{x}$ 의 값이 존재한다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x) \geq -4x^2 + x$이다.

우리만의 실전 풀이

THINKING!

위에서 말했듯이 [수학Ⅱ]에서 나오는 연속과 미분, 적분은 대부분 **다항함수**에 관해서 물어보는 문제야.
다항함수라는 사실과 다음 조건들 중 하나가 나오면 우린 함수의 식을 쓸 수 있어.

1. 최고차항의 차수 / 2. N차 함수

그리고 n차 함수 즉, 최고차항의 차수가 n인 다항함수임이 결정되면 다음과 같이 함수식을 쓸 수 있지.

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$$

그럼 이 사실을 이용해 이 문제도 풀어보자!

STEP 1 **어떤 다항함수일까?**

지금 문제를 다시 한 번 읽어보자.

'최고차항의 계수가 1이고 ~는 모든 삼차함수 $f(x)$'

라고 되어있지? 그럼 일단 $f(x)$는 다음과 같은 두 조건을 가진 함수라는 뜻이야.

1. 최고차항의 계수가 1이다. / 2. 최고차항의 차수가 3이다.

그럼 함수 $f(x)$는 이렇게 쓸 수 있어.

$$f(x)=x^3+\ldots$$

하지만 x^2의 계수, x의 계수, 상수항은 아직 모르는 상태야.
그럼 각각 a, b, c로 두고 식을 써보자.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

문자가 a, b, c 세 개를 써서 문제가 많이 어려울 것 같다고?
하지만 다음 **STEP**을 보면 세 개 중에 두 개가 바로 해결가능하다는 것을 알 수 있을 거야!

↓

STEP 2 **극한의 정의를 잘 생각해보자!**

두 개의 조건을 보기 전 함수가 어떻게 생긴 함수인지 보았으니 이젠 (가) 조건을 한번 보자.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|f(x)-1|}{x}$이 존재한다고 되어있지?

함수 $f(x)$가 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 구했으니 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|f(x)-1|}{x}$에 그럼 이걸 대입해보자.

$$\lim_{x\to0}\frac{|x^3+ax^2+bx+c-1|}{x}$$

먼저 상수항부터 보면 (분모) → 0, 분자 → $c-1$인데 만약 $c\neq1$이라고 가정해보자.

그럼 $c-1 \neq 0$ 이니까 식 $\dfrac{\left|x^3+ax^2+bx+c-1\right|}{x}$ 는 $\dfrac{\text{상수}}{0}$ 꼴이야.

그럼 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\left|x^3+ax^2+bx+c-1\right|}{x}=\infty$ 겠지. $c\neq 1$ 일 때는 조건에 맞지 않으니까 $c=1$ 이야.

그리고 $c=1$ 이 됨으로써 $\dfrac{0}{0}$ 의 꼴로 해야 발산하지 않고 극한값이 존재할 가능성이 생겨.

그래서 지금까지 구한 함수 $f(x)$ 는 이렇게 쓸 수 있어.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$$

그리고 다시 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\left|f(x)-1\right|}{x}$ 에 대입해보자.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left|x^3+ax^2+bx\right|}{x}$$

위 식이 극한값이 존재하기 위해서는 다음 조건이 성립해야해.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\left|x^3+ax^2+bx\right|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\left|x^3+ax^2+bx\right|}{x}=L$$

먼저 $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\left|x^3+ax^2+bx\right|}{x}$ 를 보자.

이때 $x\to 0+$ (x가 0보다 크면서 0에 한없이 가까워질 때) 이니까,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{\left|x^3+ax^2+bx\right|}{x}&=\lim_{x\to 0+}\frac{\left|x^3+ax^2+bx\right|}{|x|}\\&=\lim_{x\to 0+}\left|\frac{x^3+ax^2+bx}{x}\right|\\&=\lim_{x\to 0+}\left|x^2+ax+b\right|\\&=|b|\end{aligned}$$

그리고 $\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{\left|x^3+ax^2+bx\right|}{x}$ 에서는 $x\to 0-$ (x가 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때) 이니까,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-}\frac{\left|x^3+ax^2+bx\right|}{x}&=\lim_{x\to 0-}\frac{\left|x^3+ax^2+bx\right|}{-|x|}\\&=\lim_{x\to 0-}-\left|\frac{x^3+ax^2+bx}{x}\right|\\&=\lim_{x\to 0-}-\left|x^2+ax+b\right|\\&=-|b|\end{aligned}$$

이야. 다시 정리하면,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\left|x^3+ax^2+bx\right|}{x}=|b|,\quad \lim_{x\to 0-}\frac{\left|x^3+ax^2+bx\right|}{x}=-|b|$$

이며,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|x^3+ax^2+bx|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{|x^3+ax^2+bx|}{x}$$

이여야 하므로 $|b|=-|b|$, 곧, $b=0$이야.

$c=1$이고 $b=0$이니까 함수 $f(x)$를 다시 써보자.

$f(x)=x^3+ax^2+1$ ← 여기서 a는 (가) 조건만으로 구할 수 없으니 다음 조건을 읽어보자!

〈 극한값이 존재할 조건 〉

극한이란?

함수 $f(x)$에서 x가 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 상수 L에 한없이 가까워지면 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **극한값**이라고 하고, $\lim_{x\to a}f(x)=L$로 표현한다.

예를 들어서 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x}$가 있다고 가정해보자.

그럼 $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1$이네.

하지만 $f(x)$는 $x=0$을 정의역을 가지지 않아. 그래서 다음과 같은 사실을 알 수 있어.

$x=a$에서의 극한값은 존재해도 $x=a$에서의 함숫값은 존재하지 않을 수도 있다.

우극한과 좌극한에 대해서도 알아보자!

좌극한/우극한이란?

함수 $f(x)$에서 x가 a보다 작은 방향에서 a에 한없이 가까워질 때 함숫값이 L에 한없이 가까워지면 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **좌극한**이라고 하고, $\lim_{x\to a-}f(x)=L$로 표현한다.

같은 방식으로, 함수 $f(x)$에서 x가 a보다 큰 방향에서 a에 한없이 가까워질 때 함숫값이 L에 한없이 가까워지면 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **우극한**이라고 하고, $\lim_{x\to a+}f(x)=L$로 표현한다.

이고, 관련하여 다음 두 명제가 필요충분조건이야.

극한값이 존재한다?

$$\lim_{x\to a}f(x)=L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=L \quad (\text{단, } L\text{은 상수})$$

간단하게 말해서 $x=a$에서의 극한값이 존재하면 우극한 값과 좌극한 값이 같고,
우극한 값과 좌극한 값이 같으면 극한값이 존재해.

STEP 3 **여기서 판별식을 사용한다고?**

(나) 조건을 읽어보자.

모든 실수 x에 대하여 $xf(x) \geq -4x^2+x$이라고 되어있어.

앞에서 $f(x)=x^3+ax^2+1$라고 했으니 이것을 대입해보자.

$$x^4+ax^3+x \geq -4x^2+x$$

$$x^4+ax^3+4x^2 \geq 0$$

$$x^2(x^2+ax+4) \geq 0$$

여기서 $x^2 \geq 0$이지?

따라서 $x^2+ax+4 \geq 0$임을 알 수 있어.

모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+4 \geq 0$이므로

이차함수 $y=x^2+ax+4$가 x축에 접하거나 x축 위에 있어야 하는 것을 알 수 있어.

이때 판별식을 써야하겠지?

판별식 D에 대하여 $D \leq 0$이므로

$$a^2-16 \leq 0$$

$-4 \leq a \leq 4$이야.

STEP 4 **함숫값은 최댓값은?**

이젠 $f(5)$의 최댓값을 구해야하니까, $f(5)=5^3+a\times5^2+1=25a+126$이고

$-4 \leq a \leq 4$이니까 $26 \leq f(5)=25a+126 \leq 226$이야.

따라서 $f(5)$의 최댓값은 226이야.

[정답] 226

먼저 중요한 것은 '삼차함수이다', '최고차항의 계수가 1이다'처럼 간단해 보이는 조건도 꼼꼼히 확인하고 넘어가야 한다는 것이야! 이번 문제 같은 경우에도 이런 조건을 읽지 못했거나 그냥 넘어갔다면 (가) 조건과 (나) 조건을 어떻게 해결해야 하는지도 잘 몰랐겠지?

그 다음으로 강조할건 판별식과 같이 [수학Ⅱ] 이전에 배운 내용들도 [수학Ⅱ] 문제에 나올 수 있다는 사실이야! 혹시 문제를 풀면서 이런 부분에서 많이 막힌다면 한번 복습해보는 것도 좋아.

STYLE 02

극한값과 함수값이 다르네? : 연속의 조건!

함수가 연속이거나 불연속이라는 조건 많이 봤지?

하지만 함수가 연속이거나 함수가 불연속이라는 조건을 직접 이야기를 안 할 수도 있어.

그게 무슨 말이냐고? 여기 2023학년도 9월 모의평가 문제가 있어.

앞서 Story 7에서 봤던 문제이겠지만 중요한 만큼 다시 한 번 가져와봤어.

까먹은 친구들을 위해 힌트를 하나 주면, 연속의 조건을 잘 생각해봐.

[2024학년도 9월 모의평가 15번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0)\\ 3 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이라 하자. $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

우리만의 실전 풀이

THINKING!

$g(x)$가 복잡하게 정의되어 있어서 어려운 문제처럼 보이지?

하지만 연속의 정의와 극한에 대해서 잘 생각해보면 삼차함수 $f(x)$를 어떻게 구해야 하는지 알 수 있을 거야.

먼저 문제를 풀기 전에 연속의 조건에 대해서 한번 생각해보자.

[수학Ⅱ]에서 연속에 대해서는 다음과 같이 정의되어 있어.

연속이 되기 위한 조건

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면

① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

② 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재한다.

③ 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값과 함숫값 $f(a)$의 값이 같다. ⇒ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

그리고 위 조건 중 하나라도 만족하지 않는다면 다시 말해서 연속이 아니라면 이것을 **불연속**이라고 해.

예를 들어서 이렇게 생각해볼 수 있어.

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ 가 있다고 가정해보자.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속일까? 불연속일까?

$x=0$일 때 위의 조건들 중 ②번 조건 '극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재한다'라는 조건이 어긋나지.

그래서 $x=0$에서 연속이 아니니까 불연속이라는 것을 알 수 있어.

그러면 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-2} & (x\neq 2) \\ 1 & (x=2) \end{cases}$ 는 $x=2$에서 연속일까? 불연속일까?

$x=2$일 때 위의 조건들 중 ③번 조건 '$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$'라는 조건에 어긋나.

그래서 $x=2$에서 연속이 아니니까 불연속이라는 것을 알 수 있어.

그러면 이제 문제를 풀어보자!

STEP 1 **함수값과 극한값이 다르네?**

$\lim_{x \to 3} g(x) = g(3) - 1$ 이라는 조건을 자세히 보자.

만약 $g(x)$가 $x = 3$에서 연속이라면 방금 말했듯이 $\lim_{x \to 3} g(x) = g(3)$이겠지.

하지만 $\lim_{x \to 3} g(x) = g(3) - 1$이니까 $\lim_{x \to 3} g(x) \neq g(3)$이야.

그럼 이것을 통해서 $g(x)$가 $x = 3$에서 불연속인 것을 볼 수 있어.

이젠 $g(x)$가 어떻게 정의되어 있는지 보자.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x) \neq 0) \\ 3 & (f(x) = 0) \end{cases}$$

만약 $f(x) \neq 0$인 x에 대해서는 $g(x)$의 값이 $\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$이니까 연속이겠지?

(삼차함수끼리 곱하고 더하고 나눴으니까 연속이야)

따라서 $f(3) = 0$인 것을 알 수 있어.

그리고 함수 $f(x)$의 식을 써보면 이 함수는 '최고차항의 계수가 1인 삼차함수'이니까

$f(x) = (x-3)(x^2 + px + q)$로 쓸 수 있겠네.

STEP 2 **분모를 통해서 분자를 추측해보자!**

이젠 $\lim_{x \to 3} g(x) = g(3) - 1$라는 식을 다시 활용해보자.

먼저 우변인 $g(3) - 1$부터 보자.

$f(3) = 0$이니까 $g(3) = 3$이겠지?

따라서 우변은 2야. 다음과 같은 식으로 바꿔보자.

$$\lim_{x \to 3} g(x) = 2$$

좌변인 $\lim_{x \to 3} g(x)$에서 $x \to 3$은 x가 3이 아니면서 3에 한없이 가까워진다는 뜻이라는 것은

앞의 STYLE 01에서 언급했었지?

삼차함수는 상수함수인 구간이 없으니까 $f(3) = 0$이라면

$x \neq 3$이면서 $x = 3$ 근처에서는 $f(x)$값이 0이 아니야.

$f(x) \neq 0$일 때는 $g(x) = \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$이니까

$\lim_{x \to 3} g(x) = \lim_{x \to 3} \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$이야.

분모가 $f(x)$이니까 $x \to 3$이면 (분모)$\to 0$임을 알 수 있는데

$\lim_{x \to 3} g(x) = 2$로 극한값이 존재해야하니까 (분자)→ 0 임을 알 수 있어.

따라서 $\lim_{x \to 3} f(x+3)\{f(x)+1\} = f(6)\{f(3)+1\} = 0$ 이야.

(삼차함수는 연속이니까 삼차함수들의 곱으로 이루어진 $f(x+3)\{f(x)+1\}$도 연속이야.

그래서 그냥 $x = 3$을 대입해도 값이 똑같겠지.)

$f(3)+1 = 1$ 이니까 $f(6) = 0$ 이네

그럼 함수 $f(x)$의 식을 다시 써보자.

$f(x) = (x-3)(x-6)(x-\alpha)$ 이야.

STEP 3 **삼차함수를 구해보자!**

방금 구한 함수 $f(x)$를 $\lim_{x \to 3} g(x) = 2$에 대입해보자.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} g(x) &= \lim_{x \to 3} \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{x(x-3)(x+3-\alpha)\{(x-3)(x-6)(x-\alpha)+1\}}{(x-3)(x-6)(x-\alpha)} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{x(x+3-\alpha)\{(x-3)(x-6)(x-\alpha)+1\}}{(x-6)(x-\alpha)}\end{aligned}$$

만약 $\alpha = 3$ 이라면

$$\lim_{x \to 3} \frac{x(x+3-\alpha)\{(x-3)(x-6)(x-\alpha)+1\}}{(x-6)(x-\alpha)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2\{(x-3)^2(x-6)+1\}}{(x-6)(x-3)} = \infty$$

따라서 $\alpha \neq 3$ 이야.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x(x+3-\alpha)\{(x-3)(x-6)(x-\alpha)+1\}}{(x-6)(x-\alpha)} = \frac{(6-\alpha)}{(\alpha-3)} = 2$$

$$6-\alpha = 2\alpha - 6, \quad \alpha = 4$$

따라서 $f(x) = (x-3)(x-6)(x-4)$ 야.

그러면 문제에서 구하라고 한 값을 구해보자.

$g(5)$의 값을 구하라고 되어있어.

$f(5) \neq 0$ 이니까 $g(5) = \dfrac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)} = \dfrac{40 \times (-2+1)}{-2} = 20$

[정답] 20

여기서 핵심은

'극한값과 함숫값이 같지 않다는 것을 어떻게 볼 것이냐?', '극한값을 통해 삼차함수를 어떻게 구할 것이냐?' 에 있었어. 혹시 익숙하지 않다면 비슷한 문제들로 연습해보자!

STYLE 03

극한처럼 보이지만 사실 도형문제? : 도형을 활용한 극한문제?

공통문제에서 도형문제가 나오는 것을 많이 볼 수 있어.

대부분 [수학 I]의 '사인법칙과 코사인법칙의 활용' 문제에서 자주 볼 수 있어.

하지만 [수학 II] 문제에서 도형문제가 나온다면 어떻게 될까?

도형의 특징을 잘 생각해보면서 이 문제를 풀어보자!

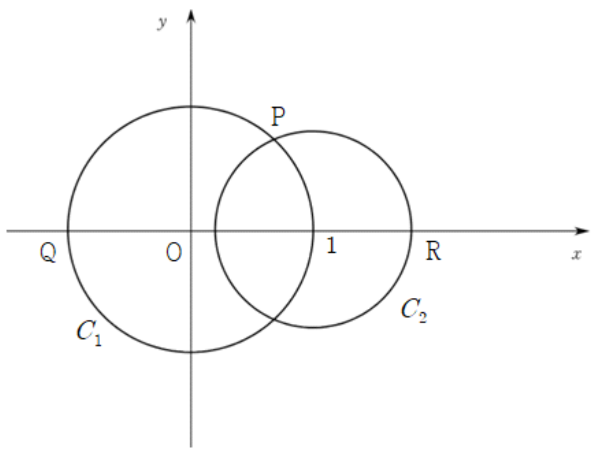
[2014학년도 4월 전국연합학력평가 나형 14번]

그림과 같이 좌표평면 위의 두 원

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1$$

$$C_2 : (x-1)^2 + y^2 = r^2 \quad (0 < r < \sqrt{2})$$

이 제1 사분면에서 만나는 점을 P 라 하자.



점 P 의 x 좌표를 $f(r)$라 할 때, $\lim_{r \to \sqrt{2}-} \frac{f(r)}{4-r^4}$ 의 값은? [4점]

우리만의 실전 풀이

THINKING!

이 문제에서는 ‘원’이라는 도형이 나오지? 우선 원의 정확한 정의에 대해서 알아보자.

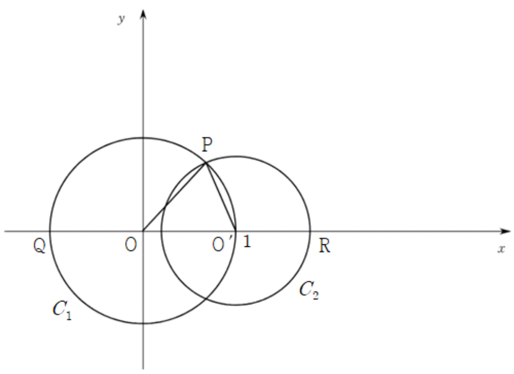
원의 정의

원은 한 점으로부터 거리가 같은 점들의 집합이다.
이때 말하는 한 점은 ‘원의 중심’이라고 하며
여기서 말하는 거리는 ‘반지름’을 말한다.

갑자기 원의 정의는 왜 말하냐고?
그만큼 반지름이라는 대상이 원에서 가장 중요한 요소이기 때문이야.
그래서 원 위의 점이 있다면 원의 중심까지의 선분을 그으면 반지름이고,
많은 원과 관련한 문제에서, 이것을 활용해야하는 상황이 생기곤 하지.

STEP 1 삼각형부터 그려보자

설명을 편하게 하기 위해서 원 C_2의 중심을 점 O'이라고 해보자.
점 P는 두 원 C_1과 C_2 위의 점이야.
원 C_1의 반지름이 1인 원이고, 원 C_2은 반지름이 r인 원이야.
그래서 원 C_1과 C_2 원의 반지름인 $\overline{\mathrm{OP}}$과 $\overline{\mathrm{PO}'}$는 각각 1과 r이야.
그럼 이걸 보조선으로 그어보자.



그럼 삼각형 POO'를 생각해볼 수 있어.

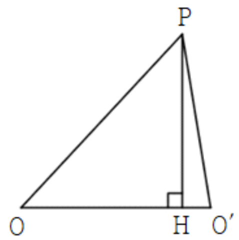
STEP 2 **좌표를 구하기 위해 도형을 보자!**

점 P 의 좌표를 구해야 하는 것이 이 문제의 목적이야.

그럼 어떻게 생각해볼 수 있을까?

먼저 점 P 에서 x축에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

삼각형의 모양이 이렇게 되겠지?



여기서 $\overline{\mathrm{OP}}=1$, $\overline{\mathrm{OO'}}=1$, $\overline{\mathrm{O'P}}=r$이야.

$\overline{\mathrm{OH}}=x$라 해보자.

삼각형 OPH 에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{\mathrm{OP}}^2=\overline{\mathrm{OH}}^2+\overline{\mathrm{PH}}^2$$

$$1=x^2+\overline{\mathrm{PH}}^2$$

이고, 삼각형 O′PH 에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{\mathrm{O'P}}^2=\overline{\mathrm{O'H}}^2+\overline{\mathrm{PH}}^2$$

$r^2=(1-x)^2+\overline{\mathrm{PH}}^2$이야. 위에서 구한 두 식에 의해서

$$\overline{\mathrm{PH}}^2=1-x^2=r^2-(1-x)^2$$

$$1-x^2=r^2-1+2x-x^2$$

$$x=1-\frac{1}{2}r^2$$

이때 $\overline{\mathrm{OH}}=x$라고 가정했는데 P 의 x좌표는 $\overline{\mathrm{OH}}$ 값과 같지?

따라서 점 P 의 x좌표인 $f(r)$은 $f(r)=1-\frac{1}{2}r^2$이야.

이렇게 좌표평면에서 점의 x좌표나 y좌표를 구하기 위해서는 x축이나 y축에 평행한 선분을 그어보자.

STEP 3 **극한값 계산하기!**

$f(r)=1-\dfrac{1}{2}r^2$ 이니까 $\lim_{r\to\sqrt{2}-}\dfrac{f(r)}{4-r^4}$ 의 값은

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\sqrt{2}-}\frac{f(r)}{4-r^4}&=\frac{1}{2}\times\lim_{r\to\sqrt{2}-}\frac{2-r^2}{4-r^4}\\&=\frac{1}{2}\times\lim_{r\to\sqrt{2}-}\frac{2-r^2}{(2-r^2)(2+r^2)}\\&=\frac{1}{2}\times\lim_{r\to\sqrt{2}-}\frac{1}{(2+r^2)}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

이렇게 분모와 분자의 극한값이 모두 0 이 나오면 인수분해를 통해 약분이 되는지 체크해보자.

[정답] $\dfrac{1}{8}$

모든 과목, 단원에서 도형이 문제에 나오면 중요한 점은 도형의 성질이야.
이번 같은 경우에는 원의 성질을 사용했어.
하지만 아래 부록에서 언급하긴 할텐데 사실 이 문제는 연립해서 x 값을 구하는 것이 빠른 방법이기는 해.
그래도 여러 가지 풀이를 공부해두는 것도 좋은 방법이니 위 방법과 아래 부록의 방법 다 참고해보자!

★ Style 03 부록

위 방법에서 점 P 는 두 원

$$C_1 : x^2+y^2=1$$

$$C_2 : (x-1)^2+y^2=r^2$$

의 교점이니까 두 원의 방정식을 연립하면 두 원이 만나는 두 개의 교점을 구할 수 있어.
그 중 y 값이 양수인 점이 점 P 의 좌표이겠지.

(사실 y 부터 소거하면 x 값부터 구해지는데 두 개의 교점 모두 x 좌표가 같기 때문에 바로 구할 수 있어.)

만약 실제로 시험장에서 이 문제를 푼다면 이 방법이 더 쉬울 거야.
하지만 이 문제에서 말하고 싶은 건 도형의 성질에 대한 이야기라서 이런 방법도 있다고 언급하고 싶었으니 참고하길 바라.

SEOL:NAME, The Signature [테크닉 총정리]

CHECK 01 문제에 있는 힌트

문제를 읽을 때 조건 (가)와 (나) 같은 조건이 눈에 바로 보이지만 그 전에 $f(x)$가 어떤 함수인지, 다항함수라면 최고차항의 계수는 무엇이고, 몇차함수인지, 실수 전체의 집합에서 연속인 함수인지 아니면 미분가능한 함수인지 확인해봐야 한다.

CHECK 02 극한값이 존재할 조건

'극한값이 존재한다는 것'과 '우극한과 좌극한이 존재하고 두 값이 같다'는 것은 필요충분조건이다.
다시 말해서 극한값이 존재한다면 우극한과 좌극한이 같고, 우극한과 좌극한이 같다면 극한값이 존재한다는 뜻이다. 특히 극한값을 구하는 과정에 절댓값이 있으면 헷갈릴 수도 있으니 주의해야 한다.

CHECK 03 연속일 조건

함수가 $x=a$에서 연속이기 위해서는 다음 두 조건을 **모두** 만족해야 한다.

① $x=a$에서 $f(x)$가 정의되고, 극한값이 존재한다.

② $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$

이와 관련한 예시는 STYLE 02에서 설명했으니 참고하자.

CHECK 04 도형과 극한

도형과 극한이 같이 나오더라도 결국은

① 도형을 파악한다.

② 극한값을 계산한다.

순서임을 기억해야 한다. 도형의 성질을 잘 파악하고 문제를 해결하는 것이 중요하다.

CHECK 05 교점 구하기

두 도형의 방정식, 함수 그래프의 교점은 두 개의 식을 연립해서 구할 수 있다.

PRACTICE
기출문제 ATTACK

001 [2023학년도 사관학교 12번]

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \le 2) \\ ax+b & (x>2) \end{cases}$$

에 대하여 $f(\alpha)+\lim_{x\to\alpha+} f(x)=4$를 만족시키는 실수 α의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 8이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

002 [2022학년도 사관학교 12번]

닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+5 & (-1 \le x \le 1) \\ x^2-4x+a & (1 < x \le 3) \end{cases}$$

의 최댓값과 최솟값의 합이 0일 때, $\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

003 [2020학년도 수능 나형 14번]

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값을 구하시오.

[4점]

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 2$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -4$

004 [2010학년도 수능 가형 8번]

실수 a에 대하여 집합

$$\{x \mid ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x\text{는 실수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고르시오. [3점]

〈 보기 〉

ㄱ. $\lim_{a \to 0} f(a) = f(0)$

ㄴ. $\lim_{a \to c+} f(a) = \lim_{a \to c-} f(a)$인 실수 c는 2개다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개이다.

005 [2017학년도 9월 모의평가 나형 17번]

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여

$x<0$일 때, $f(x)+g(x)=x^2+4$

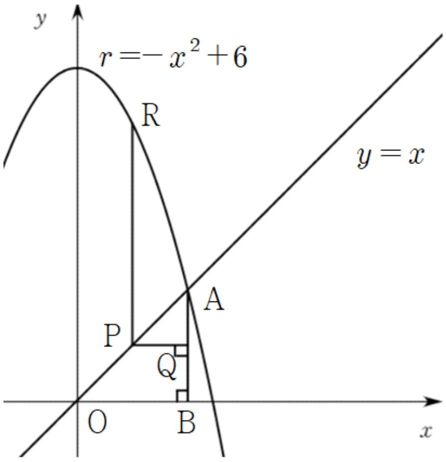
$x>0$일 때, $f(x)-g(x)=x^2+2x+8$

이다. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고 $\lim_{x\to 0-} g(x) - \lim_{x\to 0+} g(x) = 6$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

006 [2017학년도 9월 모의평가 나형 17번]

그림과 같이 곡선 $y=-x^2+6$과 직선 $y=x$가 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하자. 직선 $y=x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a)$에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=-x^2+6$과 만나는 점을 R라 할 때, $\lim_{a \to 2-} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}}$의 값을 구하시오.

(단, $0<a<2$) [4점]



007 [2024학년도 사관학교 14번]

실수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-kx$$

라 하고, 실수 a와 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a \text{ 또는 } x>a+1) \\ -f(x) & (a\le x\le a+1) \end{cases}$$

이라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. [4점]

〈 보기 〉

ㄱ. 두 실수 k, a의 값에 관계없이 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $k=4$일 때, 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 불연속인 실수 p의 개수가 1이 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 3이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 $(k,\ a)$의 개수는 2이다.

008 [2023학년도 경찰대 19번]

최고차항의 계수가 양수인 다항함수 $f(x)$와 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$ 의 값이 존재한다.

(나) $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{(x-3)g(x)}=k$ (k는 0이 아닌 상수)

(다) $\lim_{x\to -3}\frac{1}{g'(x)}=\infty$

$f(x)$ 의 차수의 최솟값이 m이다. $f(x)$의 차수가 최소일 때, $m+k$ 의 값을 구하시오. [5점]

009 [2019학년도 사관학교 나형 30번]

최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=t$의 실근이 존재하지 않을 때, $g(t)=0$이다.
>
> (나) 방정식 $f(x)=t$의 실근이 존재할 때, $g(t)$는 $f(x)=t$의 실근의 최댓값이다.

함수 $g(t)$가 $t=k$, $t=30$에서 불연속이고

$$\lim_{t\to k+} g(t) = -2\ ,\quad \lim_{t\to 30+} g(t)=1$$

일 때, 실수 k의 값을 구하시오. (단, $k<30$) [4점]

010 [2020학년도 6월 모의평가 나형 20번]

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

> $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - 4x^3 + 3x^2}{x^{n+1} + 1} = 6$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 4$인 자연수 n이 존재한다.

기출문제 ATTACK 정답 및 해설

빠른 정답

1	$-\frac{7}{4}$	2	-3	3	8	4	ㄴ, ㄷ	5	3
6	$\frac{1}{5}$	7	ㄱ	8	$\frac{49}{12}$	9	21	10	14

해 설

001

[정답] $-\frac{7}{4}$

주어진 조건을 만족하려면 $f(\alpha)=2$ 이거나 $\alpha=2$ 이다.

(i) $\alpha=2$ 이면 $5+2a+b=4$

(ii) $f(\alpha)=2$ 이면 $\alpha=-1,\ 1$ 또는 $a+b=2$

이때 준식을 만족하는 α 는 4개이고 총합이 8이므로 남은 α 는 6이다.

따라서 $6a+b=2$ 가 된다.

$a,\ b$ 를 연립하면 $a=\frac{3}{4}$ 이므로 $a+b=-\frac{7}{4}$

002

[정답] -3

조건 (가)로부터

$f(x)+x^2+2ax-3=2f(x)-3x-\{2f(1)-3\}=2f(x)-3x-2f(1)+3$

$\therefore\ f(x)=x^2+(2a+3)x+2f(1)-6$

위 식에서 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1+2a+3+2f(1)-6 \qquad \therefore\ f(1)=-2a-2$

$\therefore\ f(x)=x^2+(2a+3)x-4a-2$

조건 (나)로부터

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)+f(3)-f(3-h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(3+h)-f(3)}{h}-\frac{f(3-h)-f(3)}{h}\right]\\&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\right]\\&=f'(3)+f'(3)=2f'(3)\end{aligned}$$

$2f'(3)=6$이므로 $f'(3)=3 \qquad \therefore\ f'(x)=2x+2a+3$

즉, $f'(3)=2a+9=3$이므로 $a=-3$

003

[정답] 8

조건 (가), (나)에 의하여

$f(x)g(x)=x^2(2x+a)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $a=-4$이므로

$f(x)g(x)=2x^2(x-2)$

이때 $f(2)$가 최대가 되는 $f(x)$는

$f(x)=2x^2$

이므로 구하는 최댓값은

$f(2)=8$

004

[정답] ㄴ, ㄷ

(ⅰ) $a=0$일 때, $-4x+4=0$ $\therefore$ $x=1$

즉, $f(0)=1$

(ⅱ) $a\neq 0$일 때,

이차방정식 $ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2+a(a-2)=2(a-1)(a-2)$

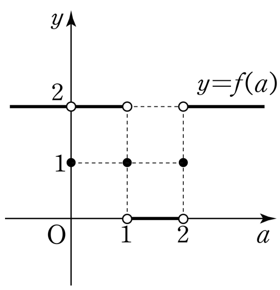
즉, 이 이차방정식은 $a=1$ 또는 $a=2$일 때 중근을 갖고, $1<a<2$일 때 실근을 갖지 않고,

$a<1$ 또는 $a>2$일 때 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서, 함수 $f(a)$는 $f(0)=f(1)=f(2)=1$,

$1<a<2$일 때 $f(a)=0$,

$a<0$ 또는 $0<a<1$ 또는 $a>2$일 때 $f(a)=2$



ㄱ. $\lim_{a\to 0}f(a)=2$, $f(0)=1$, $\lim_{a\to 0}f(a)\neq f(0)$ (거짓)

ㄴ. $\lim_{a\to c+}f(a)\neq \lim_{a\to c-}f(a)$를 만족하는 c는 1, 2의 2개다. (참)

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 $a=0$, $a=1$, $a=2$ 일 때의 3개다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

005

[정답] 3

$\lim_{x\to0} f(x) = f(0) = \alpha$라 하면

$\lim_{x\to0-} f(x) + g(x) = 4$

$\lim_{x\to0+} f(x) - g(x) = 8$

$2\alpha + (\lim_{x\to0-} g(x) - \lim_{x\to0+} g(x)) = 12$

$2\alpha + 6 = 12,\ \alpha = 3$

006

[정답] $2\sqrt{2}$

점 A는 곡선 $y = -x^2 + 6$과 직선 $y = x$가 만나는 점이므로

$-x^2 + 6 = x$

$x = 2\ (\because\ x > 0)$

$\therefore\ \mathrm{A}(2, 2)$

$\overline{\mathrm{PQ}} = 2 - a$

$\overline{\mathrm{PR}} = -a^2 + 6 - a$

$\therefore\ \lim_{a\to2-} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}} = \lim_{a\to2-} \frac{2-a}{-a^2-a+6}$

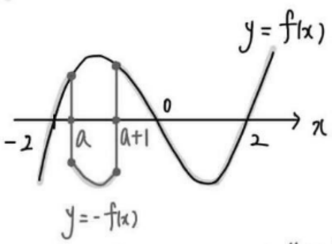
$= \lim_{a\to2-} \frac{2-a}{(a+3)(2-a)} = \lim_{a\to2-} \frac{1}{a+3} = \frac{1}{5}$

007

[정답] ㄱ

ㄱ. $\lim_{x\to0+} g(x) = \lim_{x\to0-} g(x) = g(0) = 0$이므로 연속 (참)

ㄴ. $k = 4$일 때, $f(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$이다.



→ g(x)는 x=a, a+1 에서 불연속

이때, 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이 되려면 $f(a)=-f(a)$이므로 $f(a)=0$이다.

한편, 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 불연속인 실수 p의 개수가 1이 되도록 하기 위해 $f(a)=0$ 또는 $f(a+1)=0$ 둘 중에 하나만 만족해야 한다.

이를 만족하는 a의 값은 -3, -2, -1, 0, 1, 2로 6개 (거짓)

ㄷ. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $f(a)=f(a+1)=0$이다.

$f(a)=a^3-ka=0$

$f(a+1)=(a+1)^3-k(a+1)=0$

에서

(i) $a=0$이면 : $k=1$

(ii) $a+1=0$이면 : $k=-1$

(iii) $a\neq 0$, $a+1\neq 0$이면 : $a^2=k=(a+1)^2$이므로 $a=-\frac{1}{2}$, $k=\frac{1}{4}$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

008

[정답] $\frac{49}{12}$

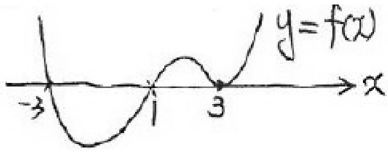
(가) $f(1)=0$

(나) $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{(x-3)f(-x)}=k$

(다) $g'(-3+)=0+$

$f(3)=0$, $f'(3)=0 \Rightarrow f(x)=(x-1)(x-3)^2Q(x)$

(나) $f(-3)=0 \Rightarrow f(x)=a(x+3)(x-1)(x-3)^2$ $(m=4)$



$$k=\lim_{x\to 3}\frac{a(x+3)(x-1)(x-3)^2}{(x-3)\times a(-x+3)(-x-1)(-x-3)^2}$$

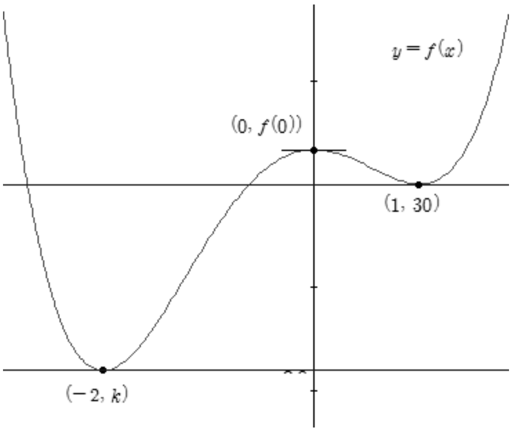
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x+3)^2}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$$

$\therefore$ $m+k=4+\frac{1}{12}=\frac{49}{12}$

009

[정답] 21

주어진 조건으로 부터 $y=f(x)$는 그림과 같이 $x=-2,\ x=1$ 일 때,
각각 극솟값 $f(-2)=k,\ f(1)=30$을 갖는다. 또한 $f'(0)=0$ 이다.



따라서 $f'(x)=4x(x+2)(x-1)=4x^3+4x^2-8x$

$f(x)=x^4+\dfrac{4}{3}x^3-4x^2+C$

$f(1)=1+\dfrac{4}{3}-4+C=30,\ \ C=\dfrac{95}{3}$

$\therefore\ \ f(x)=x^4+\dfrac{4}{3}x^3-4x^2+\dfrac{95}{3}$

$k=f(-2)=16-\dfrac{32}{3}-16+\dfrac{95}{3}=21$

010

[정답] 14

(ⅰ) $n=1$일 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$ 를 만족시키려면

$f(x)=4x^3+3x^2+ax$ (a는 상수) 의 꼴이어야 한다.

이때,

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(4x^2+3x+a)=a$ 이므로 $a=4$

즉, $f(x)=4x^3+3x^2+4x$이므로

$f(1)=4+3+4=11$

(ⅱ) $n=2$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6$$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=4$ 를 만족시키려면

$f(x)=10x^3+bx^2$ (b는 상수) 의 꼴이어야 한다.

이때,

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(10x+b)=b$ 이므로 $b=4$

즉, $f(x)=10x^3+4x^2$이므로

$f(1)=10+4=14$

(ⅲ) $n\geq 3$ 일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$ 를 만족시키려면

$f(x)=6x^{n+1}+cx^n$ (c는 상수) 의 꼴이어야 한다.

이때,

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}(6x+c)=c$ 이므로 $c=4$

즉, $f(x)=6x^{n+1}+4x^n$이므로

$f(1)=6+4=10$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 구하는 $f(1)$의 최댓값은 14