02

도함수의 활용 : 개수로 정의된 함수

개수로 정의된 함수가 나왔을 때의 풀이 방법에 대해 알아본다.

STYLE 01

개수로 정의된 함수

고난이도 문제를 풀다 보면 다항함수와 같이 많이 알려진 함수가 아니라
해당 문제에서만 쓰이는 새로운 함수를 정의한 후 조건을 주는 경우가 많다.
그 중 가장 대표적인 경우가 **실근의 개수, 교점의 개수**처럼 **개수로 정의된 함수**인데,
새롭게 정의된 함수이지만, 차근차근 나아가다보면 어렵지 않게 해결할 수 있다.

[2018학년도 9월 모의평가 나형 20번]

삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(x)=x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.
ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.
ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

THINKING!

고난이도 문제를 풀다 보면 다음과 같은 표현들을 많이 볼 것이다.

1. 실수 x 에 대한 방정식 ~의 서로 다른 실근의 개수
2. 두 곡선 ~와 ~가 만나는 점의 개수
3. 두 곡선 ~와 ~의 교점의 개수
4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 개수

이 표현들의 공통점이 무엇일까?
바로 '함수 그래프의 교점' 또는 '방정식의 서로 다른 실근의 개수'에 대해서 이야기하고 있다는 것이다.
방정식과 함수의 관계에 대해서 생각해보면, 이는 결국에는 같은 의미라는 것을 알 수 있을 것이다.
또, 이러한 표현들도 고난이도 문항에서 자주 보인다.

"실수 x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 하자."

이 경우에는 x 에 대한 식과 또 다른 변수 t 를 통해 새로운 함수 $g(t)$ 를 정의한 것이다.
함수의 정의는 교과서에 이렇게 나와 있다.

〈 함수의 정의 〉

두 집합 X와 Y에 대하여
X의 각 원소에 Y의 각 원소가 오직 하나씩 대응할 때

$$f : X \to Y$$

에서 f 를 **'X 에서 Y 로의 함수'**라고 한다.

실수 t 가 하나 정해지면 $g(t)$ 의 값이 실근의 개수로써 하나만 나오니, 이러한 방식으로 $g(t)$ 를 함수로 정의할 수 있다. 이러한 함수는 특별히 정해져있는 명칭이 없으니 여기서는 이런 함수들을 **'개수 함수'**라고 부르도록 하자.

〈 개수 함수 〉

실수 x에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 하자.
이때, 실수 전체의 집합 X , 음이 아닌 정수의 집합 Y 에 대하여 함수 g 는

$$g : X \to Y$$

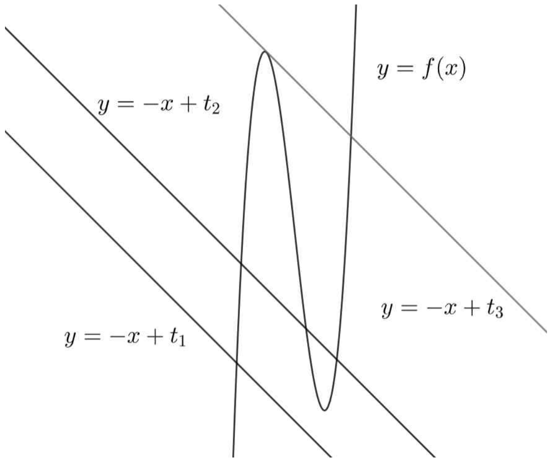
로 표현할 수 있다.

이런 함수들은 t 의 값을 조금씩 움직여보면서 개수를 세어보면 함수를 파악할 수 있다.
이 문제에서도 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$ 의 교점의 개수를 개수 함수 $g(t)$라고 정의했으므로, 위에서 살펴본 개수 함수들과 크게 다르지 않다.
그럼 삼차함수와 일차함수의 관계를 생각하면서 문제를 해결해보자.

우리만의 실전 풀이

STEP 1 $g(t)$ 파악하기

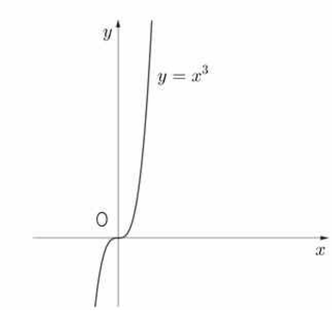
삼차함수 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-x+t$ 를 그려보자.

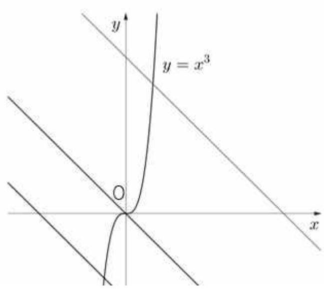


그래프를 직접 그려보면 $g(t)$ 는 두 그래프의 위치 관계에 따라 1, 2, 3 중 하나의 값이 될 수 있음을 알 수 있다.

STEP 2 ㄱ 풀기 : 상수함수의 특징

$y=x^3$ 그래프에 $y=-x+t$ 그래프를 그려보자.



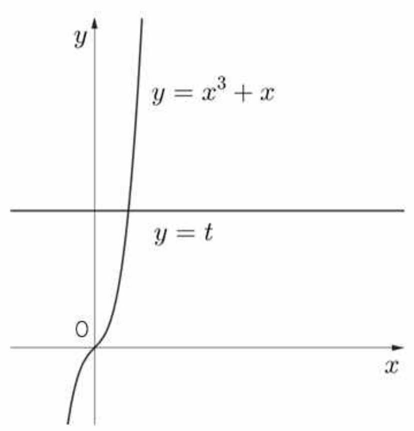


그려보면 항상 교점의 개수가 1 인 것을 알 수 있다.
모든 t 에 대해서 $g(t)=1$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 상수함수이다.

〈 다른 풀이 〉

위에서 설명한 것과 같이 $y=f(x)$ 와 $y=-x+t$ 의 교점은
x 에 대한 방정식 $f(x)=-x+t$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다.
그런데 $f(x)=x^3$ 였으니, 방정식 $x^3+x=t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 구하면 된다.

$y=x^3+x$ 그래프와 $y=t$ 그래프의 교점 개수를 파악해보면, 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=1$이므로 함수 $g(t)$는 상수함수임을 알 수 있다.



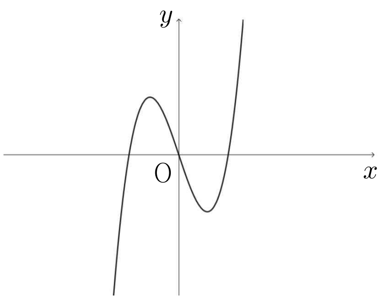
〈 상수 함수 〉

상수함수의 정의는 다음과 같다.

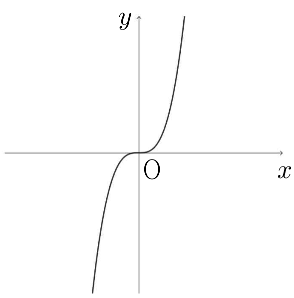
> **〈 상수함수의 정의 〉**
>
> 함수 $f:X\to Y$에 대하여
> 정의역 X의 모든 원소가 공역 Y의 하나의 원소 c에만 대응되는 함수
> 즉, 모든 x에 대하여 $f(x)=c$인 함수를 **상수함수**라고 한다.

상수함수, 항등함수와 같이 고등학교 1학년 수학에 나오는 표현도 까먹지 말고 기억해놓도록 하자.

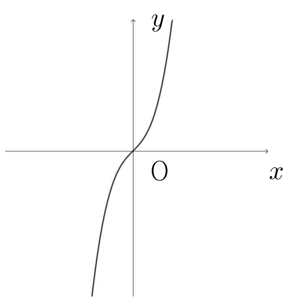
〈 삼차함수의 그래프 개형 〉



[Case A]



[Case B]



[Case C}

삼차함수에 대해서 그래프를 그리면 이렇게 세 가지 경우의 수가 나온다.
각각의 경우를 더 자세히 살펴보자.

1. Case A

삼차함수가 극댓값과 극솟값(혹은, 그냥 '극값')을 가지는 경우이다. 삼차함수는 극댓값만 가지거나 극솟값만 가지는게 불가능하므로 둘 중에 하나를 가진다면 다른 것 하나를 가진다.

2. Case B

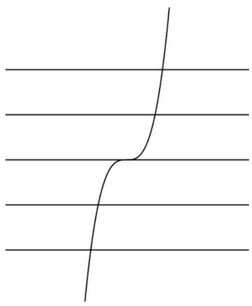
미분계수가 0인 지점이 존재하지만 극값은 가지지 않은 경우이다.
만약 함수 $f(x)$의 미분계수가 0인 지점이 x축 위에 존재한다면 삼중근을 가지는 삼차방정식의 형태로 나타낼 수 있다.

3. Case C

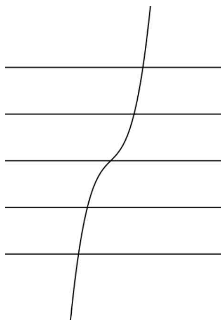
삼차함수의 미분계수가 0인 지점이 존재하지 않는 경우이다.

이 세 가지 경우에서 $y=t$와의 교점의 개수를 $g(t)$라고 해보자.
$g(t)$의 치역은 다음과 같이 두 가지 경우를 생각해볼 수 있다.

1. 치역이 $\{1\}$인 경우

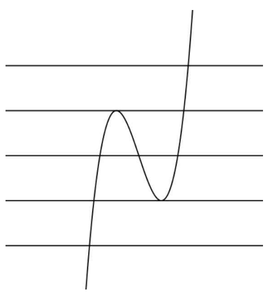


← Case B



← Case C

2. 치역이 $\{1, 2, 3\}$인 경우



← Case A

STEP 3 ㄴ 풀기 : 2와 3은 함께 움직인다

$y=f(x)$와 $y=-x+t$의 교점의 개수는 x에 대한 방정식

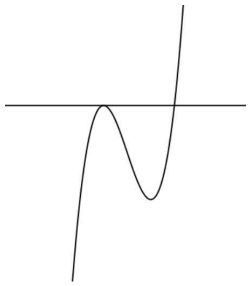
$f(x)=-x+t$의 서로 다른 실근의 개수와 같으므로 다음과 같이 생각해볼 수 있다.

방정식 $f(x)+x=t$의 실근의 개수

$f(x)+x$도 당연히 삼차함수일 것이다.

또, 삼차함수와 $y=t$의 교점의 개수가 2가 될 수 있다면, 3이 되는 경우도 존재함을

다음 그림을 통해 알 수 있다.



그러므로 [Case A]와 같은 개형에서 $g(t)=3$이 되도록 하는,

즉, $y=f(x)$와 $y=-x+t$의 교점이 3개가 되도록하는 t가 존재한다.

STEP 4 ㄷ 풀기 : 반례 찾기

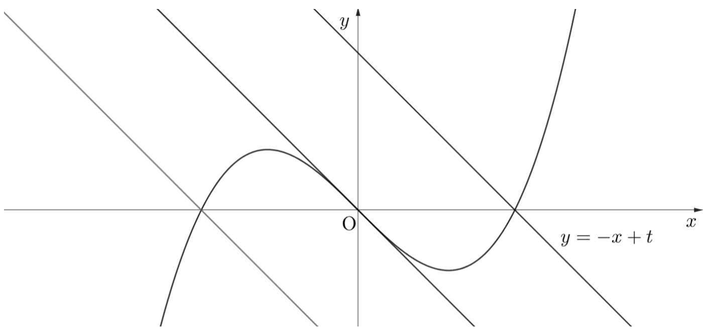
$g(x)$가 상수함수라고 가정해보자.

그럼 모든 실수 x에 대해서 $g(x)=1$일 것이다. ⋯ STEP 2 〈 삼차함수의 그래프 개형 〉 참고

만약 ㄷ이 참이라면 $g(x)$가 상수함수 일 때는 항상 $f(x)$의 극값이 존재하지 않아야 한다.

즉, $y=f(x)$와 $y=-x+t$의 교점의 개수가 계속 1인 상황에서 $f(x)$의 극값은 존재하지 않아야 하는데,

그래프를 이렇게 그려보자.



이 상황, 즉, '변곡점'에서 미분계수가 -1인 상황에서는 두 그래프의 교점의 개수가 항상 1이지만

$f(x)$는 극값이 존재한다. 이러한 반례가 존재하므로 ㄷ은 거짓인 명제라는 것을 알 수 있다.

*** 다른 풀이**

그래프가 아니라 식을 통해서도 확인할 수 있다.

$y=f(x)$ 와 $y=-x+t$ 의 교점의 개수가 계속 1인 상황에서는 $y=f(x)+x$ 와 $y=t$ 의 교점의 개수가 계속 1 이므로 $y=f(x)+x$ 는 극값을 가지지 않는 함수이다. … STEP 3 〈 삼차함수의 실근의 개수 〉

일단 $f(x)$ 는 삼차함수라는 조건 외에는 특별한 조건이 없으므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 라고 가정해보자. $(a>0)$

함수 $y=ax^3+bx^2+(c+1)x+d$ 가 극값을 가지지 않으니까

이를 x 에 대해 미분한 함수 $y'=3ax^2+2bx+c+1$ 에서, 이차방정식 $3ax^2+2bx+c+1=0$ 의 판별식을 사용하면 될 것이다. 즉, $b^2-3a(c+1)\le 0$ 이여야 극값을 가지지 않는다.

그런데 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 가 극값을 가지지 않으려면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 이므로

$b^2-3ac\le 0$ 이여야 한다.

$b^2-3a(c+1)\le 0$ 을 변형하면 $b^2-3ac\le 3a$ 임을 알 수 있다.

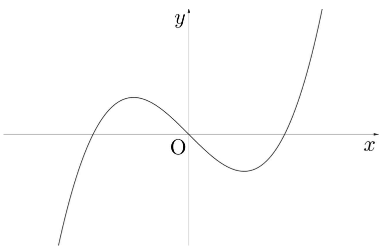
하지만, a 가 양수이면 b^2-3ac 가 양수일 수 있으므로 이 경우에는 $b^2-3ac\le 0$ 가 성립하지 않는다.

따라서 ㄷ은 거짓이다.

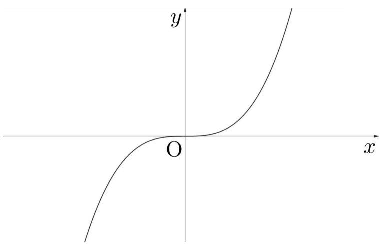
[정답] ㄱ, ㄴ

〈 삼차함수와 판별식 〉

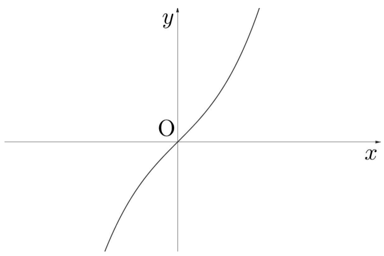
삼차함수는 다음과 같이 세 가지 개형을 가진다.



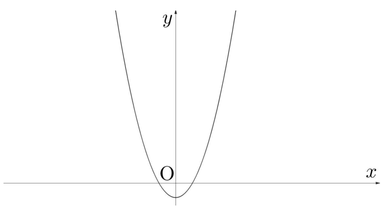
[Case A]



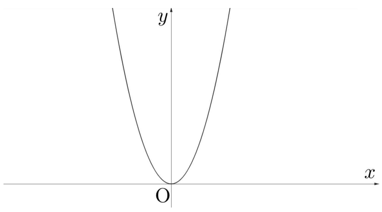
[Case B]



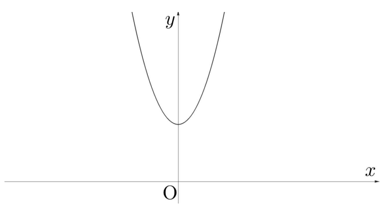
[Case C]



[Case A]



[Case B]



[Case C]

그러면 도함수는 각각 다음과 같은 개형을 띌 것이다.

또한, 이차방정식 '(도함수) $=0$ '의 판별식을 D 라고 하면 다음과 같다.

[Case A]	[Case B]	[Case C]
서로 다른 두 실근 : $D>0$	중근 : $D=0$	허근 : $D<0$

이렇게 실근의 개수로 새롭게 정의된 함수가 나오면 먼저 그 함수를 확실히 파악한 뒤 조건들을 차례로 해석해 나가면 문제를 해결할 수 있다.
그래프로 해석하고 싶다면 t와 같은 변수들을 **하나씩 움직여가면서** 파악해볼 수 있고,
식으로 해석하고 싶다면 **함수와 방정식 사이의 관계**를 활용해서 파악해볼 수 있다.
특히 [수학Ⅱ]에서는 삼차함수와 사차함수가 많이 나오니 이런 함수들은 문제들을 풀면서 익숙해지도록 하자.

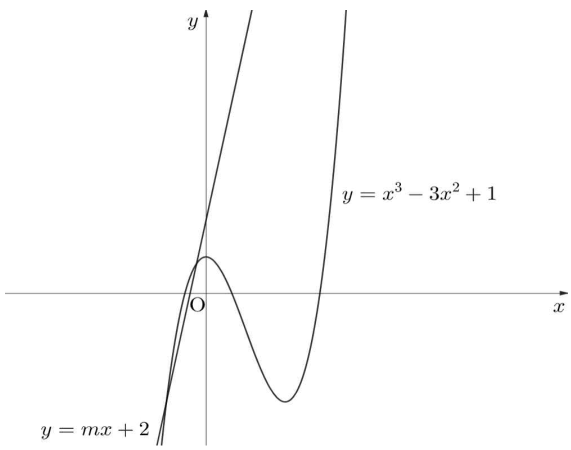
ADVICE 1 개수 함수의 정의역이 기울기여도 된다!

지금까지는 개수 함수의 정의역이 $y=t$에서의 y값이라고 생각하거나 $y=-x+t$에서 일차함수의 y절편이라고 생각하고 문제를 풀었다. 하지만 개수 함수가 그런 방식으로만 정의될 필요는 없다.

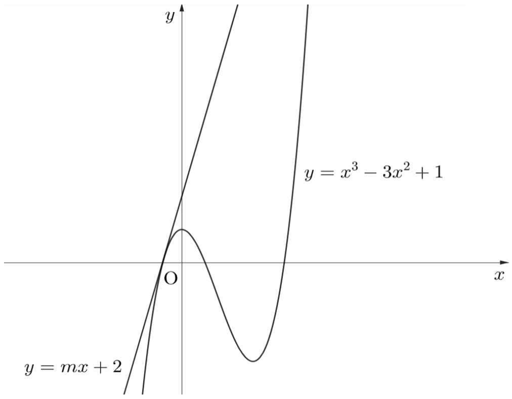
[2012학년도 수능 가형 19번]
실수 m에 대하여 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty,\ a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은? [4점]

〈 기울기에 따라 달라지는 교점의 개수 〉

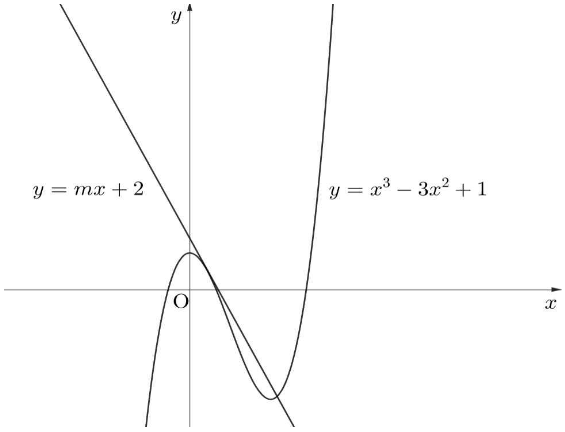
이 문제에서는 $f(m)$이 만나는 점의 개수이긴 하지만 이전까지의 문제와는 다르게 기울기를 정의역으로 가진다. 하지만 문제에 접근하는 방법은 비슷하다. 우선 곡선 $y=x^3-3x^2+1$을 그리고, 점 $(0,\ 2)$를 찍은 뒤 그 점을 지나는 직선들을 기울기에 따라 달라지게 그려가며 상황을 파악해보자.



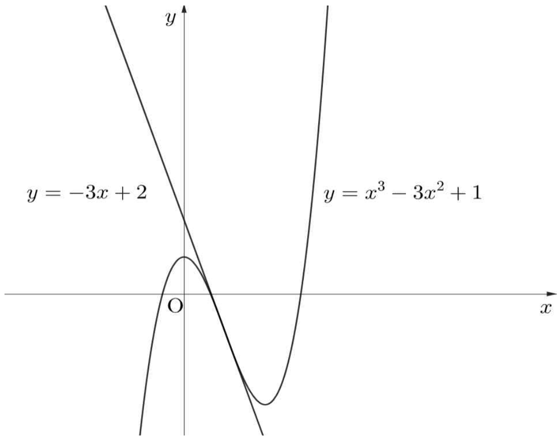
$f(m)$이 구간 $(-\infty,\ a)$에서 연속이 되려면 m(기울기)가 a일 때 까지는 교점의 개수가 계속 같아야 한다.
(개수 함수의 연속과 불연속에 관해서는 뒤에 나오는 STYLE 03에서 자세히 다룰 예정이다.)
연속의 정의를 생각해보면 **'개수 함수가 연속이다'**라는 것은 **'개수가 중간에 변하는 과정 없이 일정해야 한다'**라는 걸 이해할 수 있다. 기울기가 변하다가 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 직선의 교점의 개수가 변하는 순간을 집중해서 보자.



이는 그림과 같이 직선이 곡선에 접하는 순간일 것이다.
이때, 교점의 개수는 2이고, 기울기가 더 커지면 3이 되는 것을 확인해볼 수 있다.
지금보다 기울기가 작다면 1이 되는 순간이 생기는데, 계속해서 함숫값이 1이 되는지도 확인해보자.
만약 그래프가 이렇게 접하는 상황이 된다면 $-\infty$부터 이때까지만 연속일 것이다.

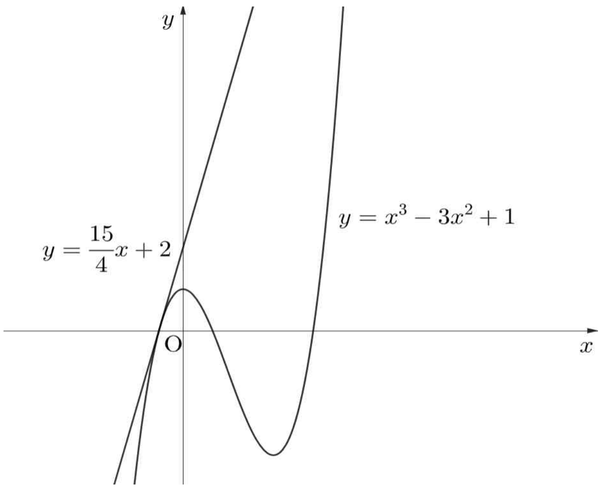


하지만 그래프가 어떻게 될지 그림만으로는 확실히 알 수가 없다. 따라서 **식으로 확인**하는 과정이 필요하다.
점 $(0,\ 2)$에서 $y=x^3-3x^2+1$로 그은 접선을 구해보자.
$y=x^3-3x^2+1$에서의 접점을 $(t,\ t^3-3t^2+1)$이라고 하면 접선이 $y=(3t^2-6t)(x-t)+t^3-3t^2+1$이고 이 접선이 점 $(0,\ 2)$을 지나므로 이를 대입하면 $(t-1)^2(2t+1)=0$라는 식이 나온다.
$t=1$일 때는 다음과 같다.



$y=-3x+2$ 가 $y=x^3-3x^2+1$ 의 변곡점에서 접하므로 $x^3-3x^2+1=-3x+2$ 는 삼중근을 가진다.

$t=-\dfrac{1}{2}$ 일 때도 확인해보자.



기울기가 $\dfrac{15}{4}$ 일 때까지는 교점의 개수가 1 이고 그것보다 커지면 3 이 된다는 것을 알 수 있다.

그럼 $\left(-\infty,\ \dfrac{15}{4}\right)$ 에서 $g(m)$ 은 연속이니까 a 의 최댓값은 $\dfrac{15}{4}$ 일 것이다.

참고로 $g(m)$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g(m)=\begin{cases} 1 & \left(m<\dfrac{15}{4}\right) \\ 2 & \left(m=\dfrac{15}{4}\right) \\ 3 & \left(m>\dfrac{15}{4}\right) \end{cases}$$

[정답] $\dfrac{15}{4}$

ADVICE 2 개수 함수가 특정한 값이 되도록 하려면?

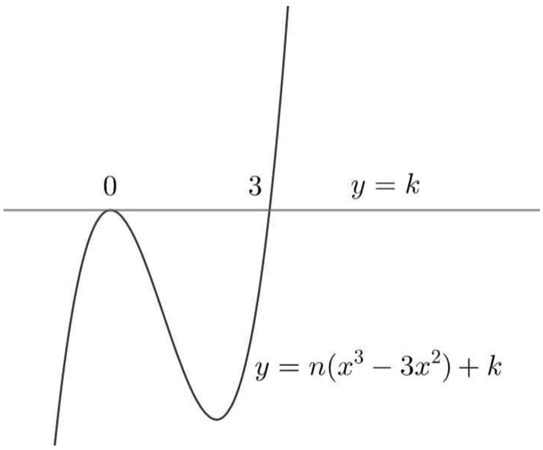
앞의 문제들은 교점의 개수를 개수 함수의 함숫값으로 생각했다.
하지만 교점의 개수가 특정한 값이 되도록 하는 상황을 구하라고 하는 문제는 어떻게 접근해야 할까?
이 문제를 한번 풀어보자.

[2019학년도 사관학교 나형 16번]

자연수 n에 대하여 삼차함수 $y=n(x^3-3x^2)+k$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

〈 수열도 함수이다 〉

수열도 자연수 전체 집합에서 정의된 실수 전체 집합으로의 함수로 생각할 수 있다.
그렇다면 이 문제에서의 수열 $\{a_n\}$ 역시 자연수 전체 집합에서 정의된 음이 아닌 정수를 원소로 갖는 집합으로의 '함수'라고 생각할 수 있다. 즉, 수열 $\{a_n\}$에서 자연수 n의 값이 정해지면 x축과 만나는 점의 개수가 3이 되는 k들을 정할 수 있다. 그 k의 개수가 a_n의 값이 될 것이다.
삼차함수 $y=n(x^3-3x^2)+k$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수를 구하기 위해 그래프를 그려보자.



해당 삼차함수는 $x=0$일 때 극대이고, $x=2$일 때 극소이다.
또, 극댓값이 k이고, 극솟값이 $k-4n$이므로 x축 $(y=0)$이 그 사이에 있다면 x축과의 교점이 3개가 된다.
따라서 $k-4n<0<k$ 임을 알 수 있다.
이때, $0<k<4n$이므로, 자연수 n에 대하여 이 부등식을 만족하는 자연수 k의 개수는 $4n-1$개이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10}(4n-1)=210$이다.

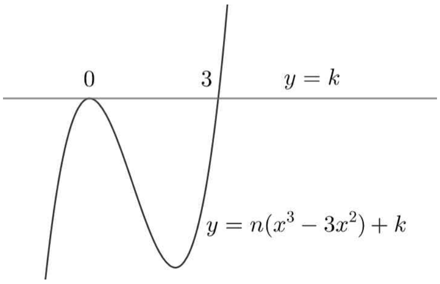
[정답] 210

〈 삼차함수 그리기와 비율관계 〉

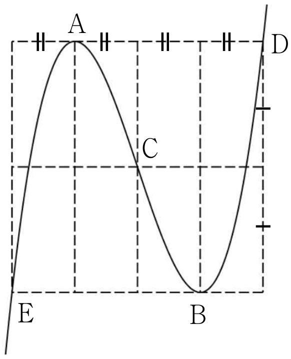
주어진 삼차함수를 그리는 방법은 다양하겠지만 여기서 사용할 방법은 직선 $y=k$와 삼차함수 그래프의 관계로 그리는 방법이다.

곡선 $y=n(x^3-3x^2)+k$는 $y=nx^2(x-3)+k$로 나타낼 수 있으므로, 직선 $y=k$를 하나의 축으로 생각하면 $y=n(x^3-3x^2)+k$는 $x=0$에서 중근을, $x=3$에서 하나의 근을 가지는 그래프이다.

이를 활용하면 아래의 그래프를 어렵지 않게 그릴 수 있다.



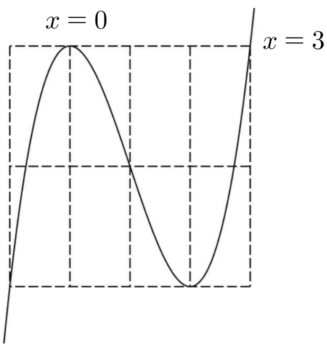
만약 위와 같이 상수항만을 제외하고 쉽게 인수분해가 되는 경우에는 이러한 방법을 통해 그래프를 그리는 것이 용이할 때가 많다. 그리고 삼차함수에는 항상 성립하는 비율관계가 있는데,



위와 같이 **극대인 지점, 극소인 지점, 대칭점(다른말로, 변곡점), 극대인 지점에서 x축과 평행하게 그은 직선과 만나는 점, 극소인 지점에서 x축과 평행하게 그은 직선과 만나는 점**, 이렇게 총 5개의 점을 찍은 뒤(순서대로 A, B, C, D, E라고 하자.) x축과 y축에 평행한 선분들을 그어서 직사각형들을 그려보자.

그럼 x축과 평행한 4개의 선분의 길이가 모두 같고, y축과 평행한 2개의 선분 길이가 같다.

이 문제에서는 다음과 같이 상황이 주어졌다.



따라서 이 삼차함수는 $x=2$에서 극소인 것을 알 수 있다.

〈 자연수의 개수 〉

가끔 $a<n<b$인 자연수 n의 개수를 구해야 하는 경우가 있다.
만약 이 개수를 구하는 것이 헷갈린다면 이렇게 생각해봐도 좋을 것이다.
(참고로 여기서 이야기하는 상수 a와 b는 자연수이다.)

1. $a<n<b$인 자연수 n

$a+1$부터 $b-1$까지의 자연수의 개수를 구하는 상황이므로 1부터 $b-1$까지의 자연수의 개수에서 1부터 a까지의 자연수의 개수를 뺀 값이다.

2. $a \le n \le b$인 자연수 n

a부터 b까지의 자연수의 개수를 구하는 상황이므로 1부터 b까지의 자연수의 개수에서 1부터 $a-1$까지의 자연수의 개수를 뺀 값이다.

$a \le n < b$나 $a<n \le b$와 같은 경우도 위와 같은 방법으로 생각하면 된다.
ex. $37<n<97$인 자연수 n의 개수는 1부터 96까지의 자연수의 개수에서 1부터 37까지의 자연수의 개수를 뺀 값이므로 $96-37=59$이다.

일반화하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.
"자연수 a, b, n에 대하여 a와 b사이의 n의 개수는 등호가 k개일 때 $b-a-1+k$이다."
예를 들어 $a<n \le b$를 만족하는 자연수 n의 개수는 등호가 1개이므로 $b-a$이다.

STYLE
02

첨점의 개수를 세어보자 : 미분가능하지 않은 x의 개수 구하기!

고난도 문항을 많이 풀어본 학생들은 다음과 같은 발문을 많이 봤을 것이다.

함수 $|f(x)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는?
함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는?

그러면 당연히 그 개수를 함수로도 만들 수 있을 것이다.
아래에 있는 문제를 한번 풀어보자.

[사관학교 2019학년도 가형 21번 변형]

함수 $f(x)=x|x^2-3x+2|$가 있다. 양수 k에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\le kx) \\ kx & (f(x)>kx) \end{cases}$$

라 하자. 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수를 $h(k)$라 할 때, $h(k)=5$을 만족시키는 k값의 범위는 $a\le k<b$ 또는 $k>b$이다. $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

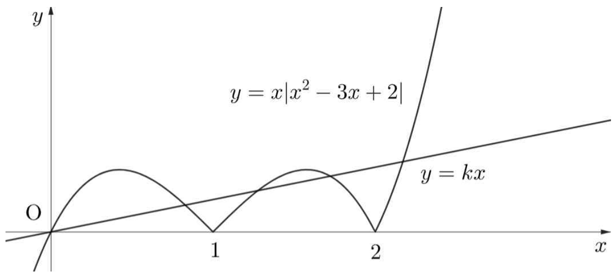
THINKING!

앞의 STYLE 01에서는 직선이나 기울기를 조금씩 움직여보면서 개수를 세어봤다.
이번에도 비슷하게, **변수를 조금씩 조정해보면서 미분가능하지 않은 점의 개수를 세어보면 된다.**
이 문제같은 경우에는 $y=f(x)$와 $y=kx$의 관계를 살펴보는 문제이므로,
두 함수의 그래프($y=f(x)$와 $y=kx$)를 그리고 $h(k)$가 어떤 함수인지 한번 파악해보자.

우리만의 실전 풀이

STEP 1 **함수를 그리자!**

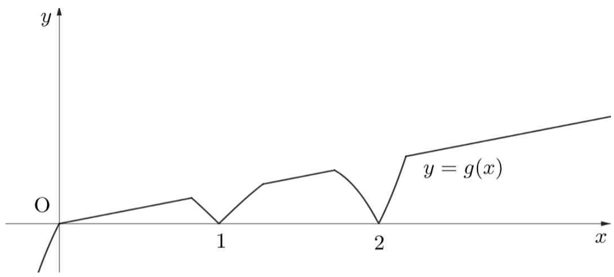
$g(x)$가 $f(x)$와 kx로 이루어진 함수이니 두 함수의 그래프를 먼저 그려보자.



적당히 $y=kx$를 그리고 함수 $g(x)$를 파악해보자. 함수 $g(x)$는 다음과 같이 정의된 함수이다.

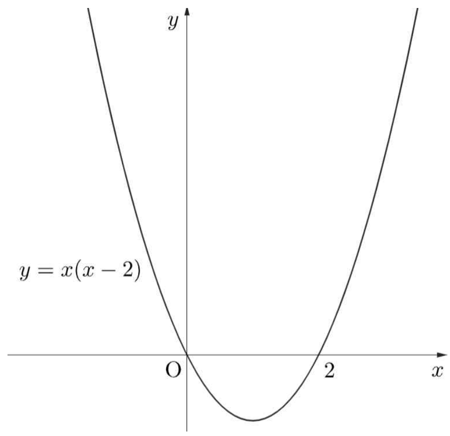
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\le kx) \\ kx & (f(x)>kx) \end{cases}$$

만약 $f(x)$가 kx보다 작다면 $g(x)$는 $f(x)$이고, kx가 $f(x)$보다 작다면 $g(x)$는 kx이므로
$f(x)$와 kx 중에서 작은게 $g(x)$로 선택되는 것이다.
그러므로 $y=g(x)$는 이렇게 그릴 수 있다.



k에 따라 변하는 $g(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프와 원점을 지나는 직선을 그리면서 파악하면 된다.

$y=x(x-2)$ 의 그래프가 있다고 가정해보자.

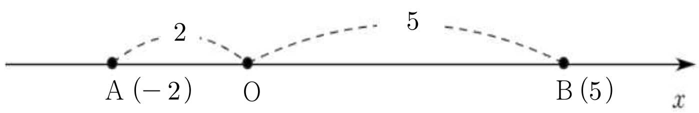


쌤, 질문 있어요! 절댓값이 있는 함수의 그래프는 어떻게 그리나요?

절댓값이 씌워진 함수 $y=|x(x-2)|$ 는 과연 어떻게 그릴 수 있을까?
절댓값의 정의, 중학교 1학년때 배웠던거야. 기억 나니?

〈 절댓값의 정의 〉

수직선 위에서 원점과 어떤 수에 대응하는 점 사이의 거리이다.



위와 같은 경우에서는 $|-2|=2$, $|5|=5$ 이다.

어떤 수에 절댓값을 씌우게 되면 음수는 $-$부호를 뺀 수(즉, -1을 곱한 수)가 되고,
0과 양수는 그 수 그대로가 된다는 특징이 있었지?
그러면 아래와 같은 상황을 생각해볼 수 있어.

$$|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

그러니 $y=|x(x-2)|$ 도 $x(x-2)$ 가 0보다 크거나 같은 상황과 0보다 작은 상황을 구분해서 생각해볼 수도 있겠지. 그런데, **함숫값 전체에 − 가 붙는 것이니, 'x 축 대칭'으로도 생각할 수 있지 않을까?**
둘 다 시도해 볼테지만, **후자에 익숙해지는 것**을 적극 권장해.

1. $x(x-2) \geq 0$ 인 경우

위 부등식의 해는 $x \geq 2$ 또는 $x \leq 0$ 이니까,

$x \geq 2$ 또는 $x \leq 0$ 일때는 $|x(x-2)|$ 가 $x(x-2)$ 그대로임을 알 수 있다.

2. $x(x-2) < 0$ 인 경우

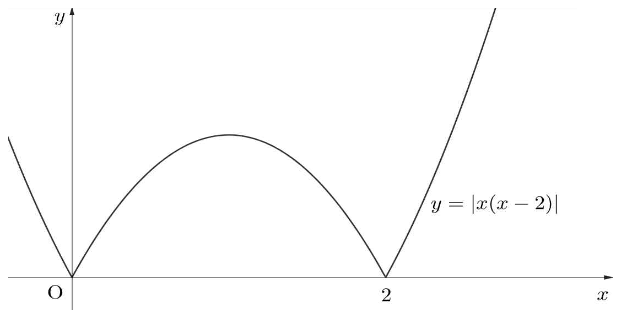
위 부등식의 해는 $0 < x < 2$ 이니까,

$0 < x < 2$ 일때는 $|x(x-2)|$ 가 $x(x-2)$에 -1을 곱해서 $-x(x-2)$가 됨을 알 수 있다.

$y = |x(x-2)|$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$|x(x-2)| = \begin{cases} x(x-2) & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x(x-2) & (0 < x < 2) \end{cases}$$

이상을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



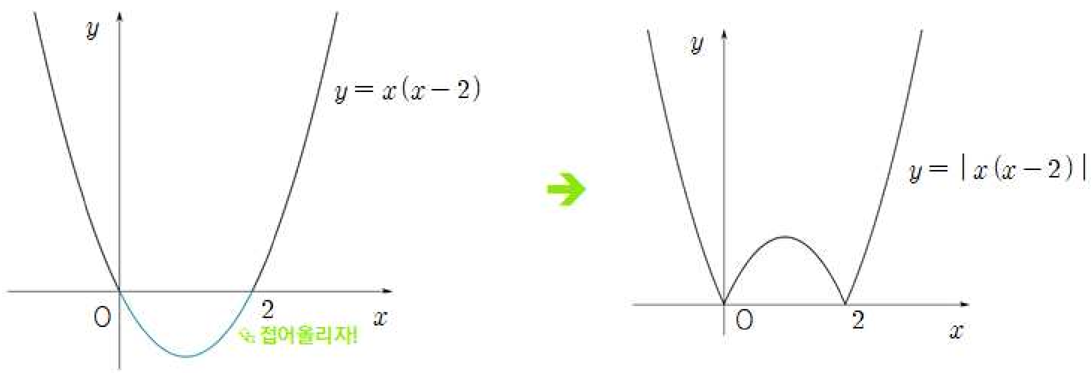
하지만 다른 방식으로, 어떤 함숫값의 부호가 반대로 바뀌면 이렇게도 해석할 수 있다.

"x 축에 대해서 대칭이다."

그러면 함수에 절댓값을 씌운 함수는

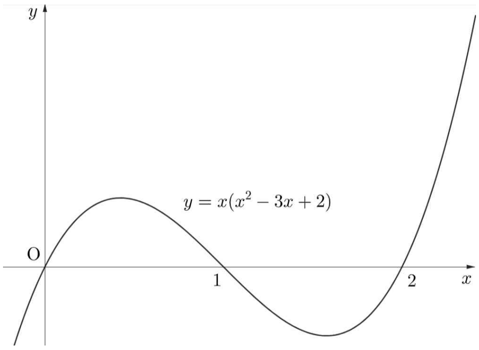
함숫값이 음수인 부분만 x 축에 대해서 대칭 시켜도 되지 않을까?

그렇게 접근해도 다음과 같이 함수의 그래프를 그릴 수 있다.



그럼 이 사실을 응용해서 $y = x|x^2 - 3x + 2|$ 의 그래프를 그려보자.

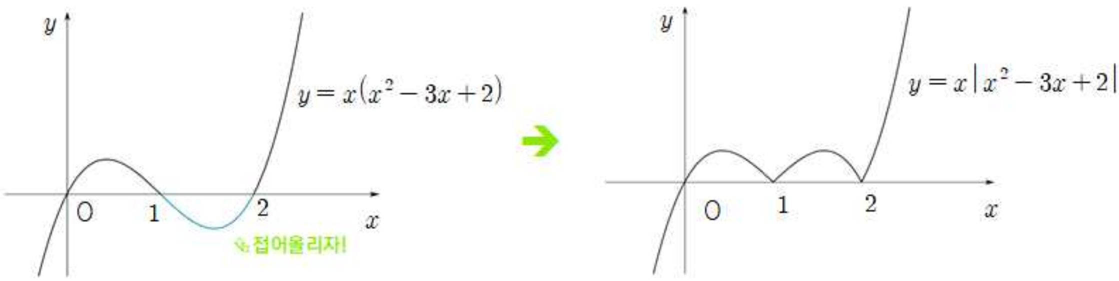
$y = x(x^2 - 3x + 2)$의 그래프는 다음과 같다.



절댓값이 씌워진 부분이 x^2-3x+2이므로 이 부분이 음수가 되는 x의 범위를 살펴보자.

$1<x<2$일 때만 x^2-3x+2가 음수이므로

$y=x|x^2-3x+2|$의 그래프는 $1<x<2$일 때만 x축을 중심으로 대칭시키면 된다.



앞으로, 함수에 절댓값이 쓰인 경우에는 이렇게 생각하자.

1. 절댓값 안의 값이 음수가 되는 경우를 찾는다.

2. 그 부분만 x축에 대해서 대칭시킨다.

⇨ 더 간단하게는 절댓값 때문에 부호가 바뀌는 범위에서 x축 아래 부분을 위로 접어올린다!

STEP 2 첨점을 찾자!

함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수를 세어야 하니 일단 함수 $g(x)$에서 미분가능하지 않은 곳이 어디인지 조사를 해보자. 일단 '미분가능하다'의 정의는 다음과 같다.

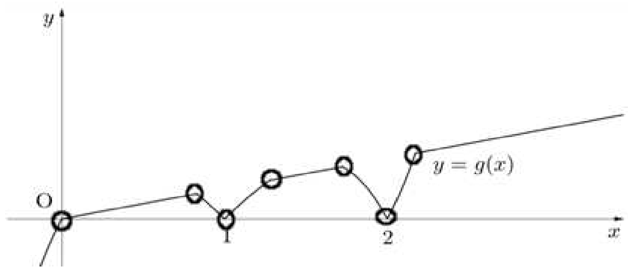
〈 미분가능의 의미 〉

평균변화율의 극한값 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$이 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능하다.**

그러면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(x)}{h}$이 존재하지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능하지 않다.**

함수 $g(x)$의 경우, $\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(x)}{h}$가 존재하지 않는 점은

$\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{g(a+h)-g(x)}{h}$ 와 $\lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{g(a+h)-g(x)}{h}$ 의 값이 다른 점이며, 아래 검은색으로 표시한 지점이다.



그래프로 그렸을 때, **부드럽지 않고 갑자기 꺾이는 지점**을 찾아도 되는데, 그 이유는

$\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(a+h)-f(x)}{h}$ 와 $\lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{f(a+h)-f(x)}{h}$ 가 어떤 의미인지 생각해보면 알 수 있을 것이다.

이러한 지점을 흔히 **'첨점'**이라고 부른다.

쌤, 질문 있어요! 순간변화율(평균변화율의 극한값)에 종류가 있지 않나요?

문제들을 여러번 풀어본 친구들이라면, 아마 이런 표현들에도 익숙할거야.

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+ah)-f(x-bh)}{(a+b)h}$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, 등등...

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 는 순간변화율의 정의이니 그렇다 치고, $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+ah)-f(x-bh)}{(a+b)h}$ 는 과연

순간변화율이라고 할 수 있을까? 그럴듯 해보이지만, **사실 그렇지 않아.**

$f(x)=|x(x-2)|$라고 생각해보자. 이때 $x=0$에서 $f(x)$는 미분가능하지 않아.

(이와 관련해서 바로 다음 페이지에서 살펴볼거야!)

그런데, $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+ah)-f(2-bh)}{(a+b)h}$를 한번 살펴볼까? 편의상 a, b는 모두 양수라고 하자.

이때, 좌극한, 즉 $\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{f(2+ah)-f(2-bh)}{(a+b)h}$ 먼저 살펴보면, $x=2+ah$ (h가 0에 아주 가까운 수이니,

$x\to2-$ 라 해도 좋겠지.) 에서 $f(x)<0$이고 $x=2-bh$에서 $f(x)>0$이니

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+ah)-f(2-bh)}{(a+b)h}=\lim_{h\to0-}\frac{-ah(2+ah)+bh(2-bh)}{(a+b)h}=\lim_{h\to0-}\frac{-a(2+ah)+b(2-bh)}{(a+b)}=\frac{2(b-a)}{b+a}$$

임을 알 수 있어, 우극한을 살펴보면, $x=2+ah$에서 $f(x)>0$이고 $x=2-bh$에서 $f(x)<0$이니

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+ah)-f(2-bh)}{(a+b)h}=\lim_{h\to0+}\frac{ah(2+ah)-bh(2-bh)}{(a+b)h}=\lim_{h\to0+}\frac{a(2+ah)-b(2-bh)}{(a+b)}=\frac{2(a-b)}{b+a}$$

임을 알 수 있어. 그런데, 이때 $a=b$이면 두 극한값이 모두 0이니 $h\to0$인 상태에서의 극한값이 정의가 되지? 어머나 세상에. 미분불가능한 지점에서 순간변화율이 정의되는 현상은 절대 있을 수 없는 일이야.

다른 말로, $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+ah)-f(x-bh)}{(a+b)h}$ 꼴의 극한값은 **순간변화율의 정의가 아니야.** 이러한 성질을 이용해

초고난도문항이 출제되는 경우가 왕왕 있단다. (대표적으로 2022학년도 9모 22번!)

특히, 위와 같이 절댓값 함수를 줘놓고 이런 방식의 야매(?) 순간변화율 표현을 제시하는 경우가 종종 있어.

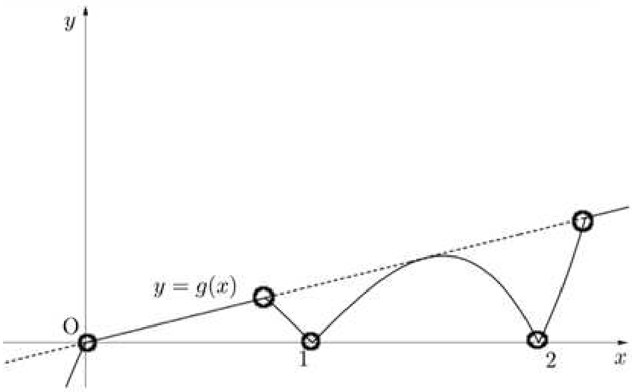
다항함수 $f(x)$를 줘놓고 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{|f(x+ah)|-|f(x-bh)|}{(a+b)h}$ 꼴로 주는건 위에서 살펴본 형태의

변형이라고 볼 수 있지. 사실, 조금만 생각해보면 위와서 살펴본 형태와 정확히 일치하는 표현이지?

STEP 3 3개가 되는 범위를 찾자!

일단 방금 찾은 $g(x)$는 미분가능하지 않은 점이 7개가 있다.

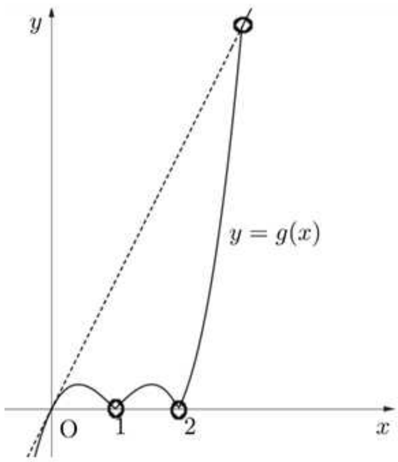
k의 값을 더 낮춰도 달라질건 없을 것 같으니 k값을 높여서 기울기를 키워보자.



이렇게 $y=kx$와 $y=f(x)$가 접하는 순간부터 $g(x)$가 5개의 점에서 미분가능하지 않다.

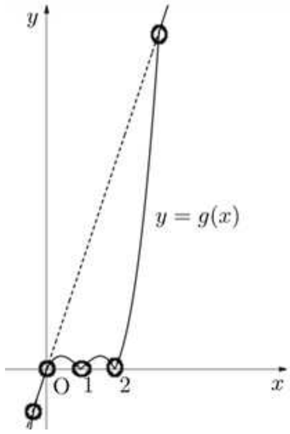
이 순간부터 5개의 점에서 미분가능하지 않는다는 걸 알 수 있다.

여기에서 기울기를 더 올려보자.



5개의 점에서 미분가능하다가 다시 접하는 순간이 오니까 이제 3개의 점에서 미분가능하지 않는다.

여기에서 기울기를 더 올려보자.



다시 5개의 점에서 미분가능하지 않다.

여기에서 기울기를 더 올려도 계속 5개의 점에서 미분가능하지 않음을 알 수 있다.

즉, 미분가능하지 않은 점의 개수가 5개가 되는 순간은 다음을 경계로 하면 된다.

“$y = f(x)$와 $y = kx$가 접하는 순간”

먼저 접점의 x좌표가 1과 2 사이에 있는 경우부터 구해보자.

$1 < x < 2$일 때는 $g(x) = -x(x^2-3x+2)$이니까

점 $(0,\ 0)$에서 $y = -x(x^2-3x+2)$으로 그은 접선을 구하면 된다.

그때의 기울기는 직접 구해보면 $\dfrac{1}{4}$라는 것을 알 수 있다.

그리고 $(0,\ 0)$에서 접하는 경우는 $g'(0)$의 값을 구하면 되니까 그때의 기울기는 2임을 알 수 있다.

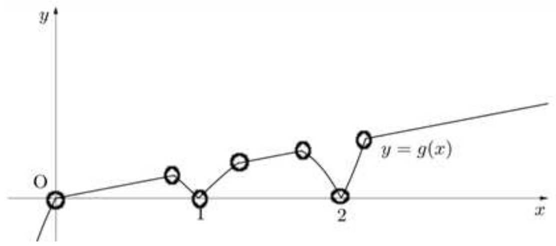
정리해보면 $\dfrac{1}{4} < k < 2$ 또는 $k > 2$일 때 $h(k) = 5$이므로 $a = \dfrac{1}{4}$, $b = 2$임을 알 수 있다.

[정답] $\dfrac{9}{4}$

〈 이렇게도 해석 가능하다! 〉

눈치가 빠른 사람들은 꼭 $g(x)$의 그래프를 일일이 그리지 않아도 된다는 사실을 알았을 것이다.

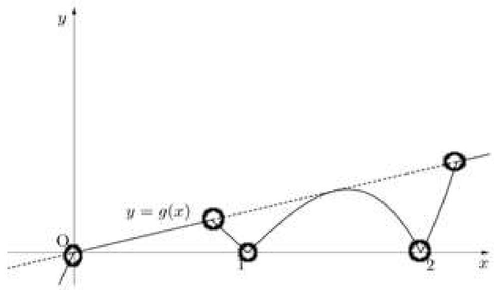
다음과 같은 경우를 살펴보자.



이 경우는 $y = f(x)$와 $y = kx$가 **접하지 않으면서** 만나는 점이 5개이고 그 점이 미분가능하지 않은 지점이다.

(=검은색으로 동그라미 표시 해놓은 점)

다음 경우를 살펴보자.



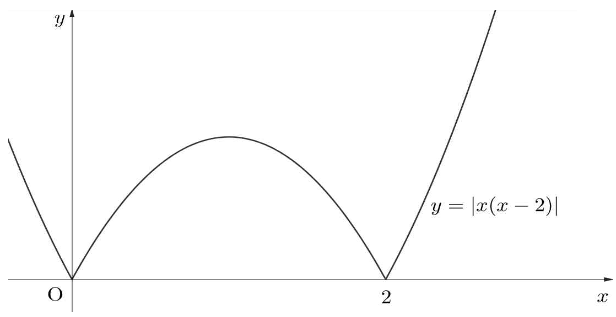
이 경우는 $y=f(x)$ 와 $y=kx$ 가 **접하지 않으면서** 만나는 점이 3개이고 그 점이 미분가능하지 않은 지점이다.
(= 검은색으로 동그라미 표시 해놓은 점)
하지만, 두 곡선이 접하는 점에서는 미분가능하다. 이 사실을 통해 다음과 같은 규칙성을 발견할 수 있다.

"접하지 않으면서 만나는 점에서 미분가능하지 않는다."

미분가능하지 않은 x 의 개수와 같은 경우에는 **그래프를 그려서 확인하는 것**이 빠른 방법 중 하나이다.
그리고 미분가능하지 않은 점의 개수 뿐만 아니라 불연속인 점의 개수 등 다양한 방법으로도 함수를 정의할 수 있으니, 이런 함수가 나와도 당황하지 말고 주어진 조건대로 차근차근 그래프를 그려보자.
은근히 불연속인 점도 미분가능하지 않은 점임을 놓치는 학생이 많으므로, 이 사실도 주의해서 체크해 보아야한다.

ADVICE 3 함수에 절댓값이 있으면 미분가능하지 않은 점이 바로 보인다?

앞에서 예시로 보여줬던 함수를 들고 와보았다.



이 함수는 다음과 같다.

$$|x(x-2)|=\begin{cases} x(x-2) & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x(x-2) & (0<x<2) \end{cases}$$

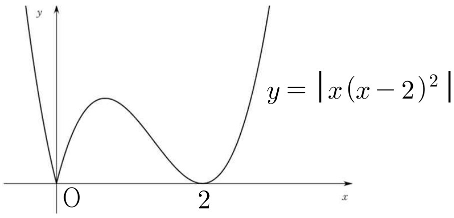
이때 $f(x)=|x(x-2)|$ 라 하면, $\lim_{h\to 0-}\dfrac{f(0+h)-f(x)}{h}=-2$, $\lim_{h\to 0+}\dfrac{f(0+h)-f(x)}{h}=2$ 이고,

$\lim_{h\to 0-}\dfrac{f(2+h)-f(x)}{h}=-2$, $\lim_{h\to 0+}\dfrac{f(2+h)-f(x)}{h}=2$ 이므로 $x=0$, $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

참고로 여기서 미분가능하지 않은 점은 $\lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ 와 $\lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ 가 다른 점이니까 함수의 기울기가 갑자기 꺾이는 지점, 즉 '첨점'이다.

그러므로 **첨점을 찾아도 그 지점이 미분가능하지 않은 점**임을 알 수 있다.

하지만 한 점에서 접하는 경우에는 어떨까?



$\lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h)-f(x)}{h} = -4$, $\lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h)-f(x)}{h} = 4$ 이므로 $x=0$ 에서는 미분가능하지 않지만

$\lim_{h \to 0-} \frac{f(2+h)-f(x)}{h} = 0$, $\lim_{h \to 0+} \frac{f(2+h)-f(x)}{h} = 0$ 이므로 $x=2$ 에서는 미분가능하다.

그럼 함수 전체에 절댓값이 씌워진 경우는 다음과 같은 사실을 생각해볼 수 있다.

1. x 축과 접하지 않으면서 만나면 그 지점에서 미분가능하지 않다.

2. x 축과 접하면서 만나면 그 지점에서 미분가능하다.

그리고 STYLE 02에 나온 문제들과 이 예시들은 만나는 점 외에는 모두 미분가능하다는 사실은 이해할 수 있어야 한다. (다항함수이므로 미분가능함을 잊지 말자.)

STYLE
03

개수 함수의 연속성

앞에서 본 문제들과 같이 개수 함수의 함숫값이 바뀌는 경우가 있다.
이를 통해 개수 함수의 특징을 알아볼 수 있는데, 개수 함수의 함숫값은 자연수이거나 0이기 때문에 개수가 바뀌면 그 지점에서 함수는 불연속이다.
이를 활용하면 개수 함수의 연속성에 관한 문제도 나올 수 있지 않을까?
다음 문제를 풀어보자.

[2022학년도 4월 학력평가 20번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-f(-x)$를 만족시킨다. 양수 t에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $(t,\ 0)$, $(0,\ 2t)$, $(-t,\ 0)$, $(0,\ -2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$, $t=8$에서 불연속이다. $\alpha^2\times f(4)$의 값을 구하시오. (단, α는 $0<\alpha<8$인 상수이다.) [4점]

THINKING!

본격적으로 개수 함수의 연속성을 다뤄보기 전에 개수 함수가 무엇이었는지 한 번 더 복습해보자.

〈 개수 함수 〉

~가 성립하는 ~의 개수를 $g(t)$라 하자.

이때, $g(t)$는 실수 전체의 집합 X와 음이 아닌 정수의 집합 Y에 대하여 함수 g는

$$g : X \rightarrow Y$$

로 표현할 수 있다.

개수 함수의 함숫값은 자연수이거나 0이다.

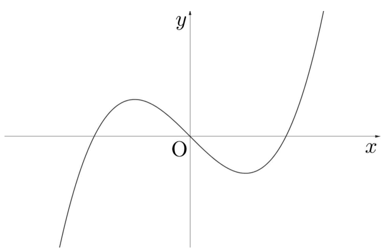
따라서 **개수 함수가 불연속이라는 것은 개수가 바뀌는 과정이 존재**한다는 것과 같은 말이다.

이 문제에서는 삼차함수와 마름모가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라고 정의했으므로, 먼저 $g(t)$를 파악해보자.

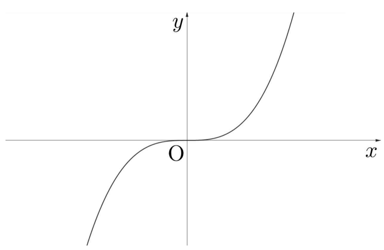
우리만의 실전 풀이

STEP 1 함수 파악하기

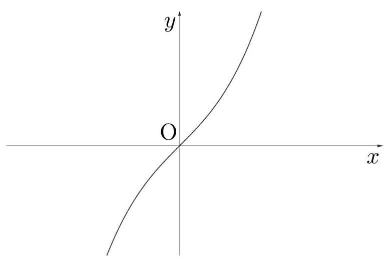
삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = -f(-x)$를 만족시킨다는 것은 해당 함수가 원점을 기준으로 대칭인 함수(기함수)라는 것이므로, 함수 $f(x)$를 다음과 같이 그릴 수 있다.



[Case A]



[Case B]



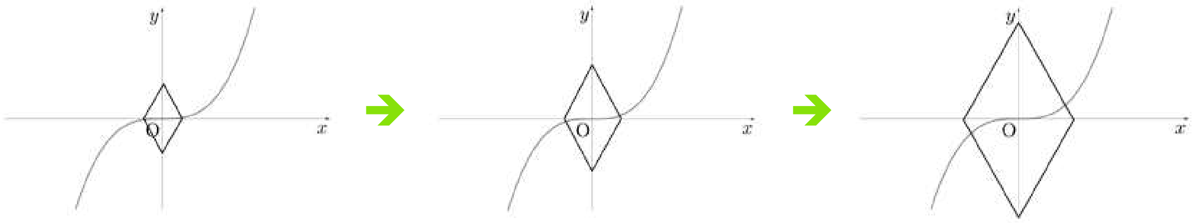
[Case C]

네 점 $(t,\ 0)$, $(0,\ 2t)$, $(-t,\ 0)$, $(0,\ -2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모의 각 변들은, 그 기울기가 2 또는 -2이다. 이를 바탕으로 위의 그래프에 마름모를 그려볼 수 있다.

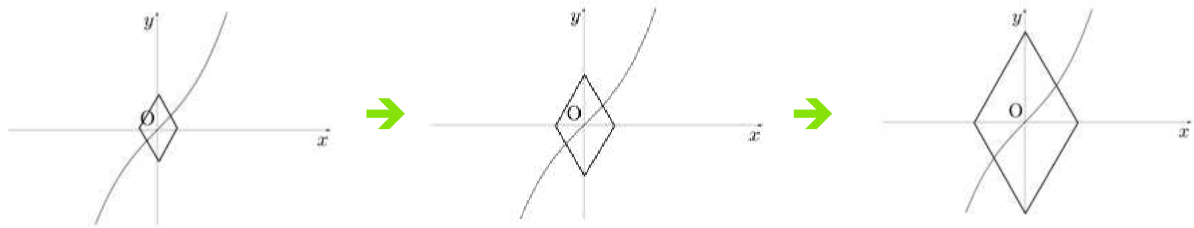
이때, 주어진 마름모와 삼차함수가 모두 원점에 대해서 대칭임을 신경써서 그려보자.

[Case B]와 [Case C]는 t에 상관없이 만나는 점의 개수가 2임을 알 수 있다.

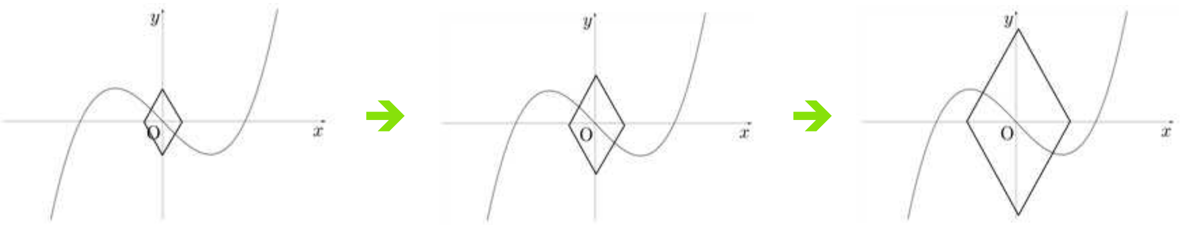
[Case B]



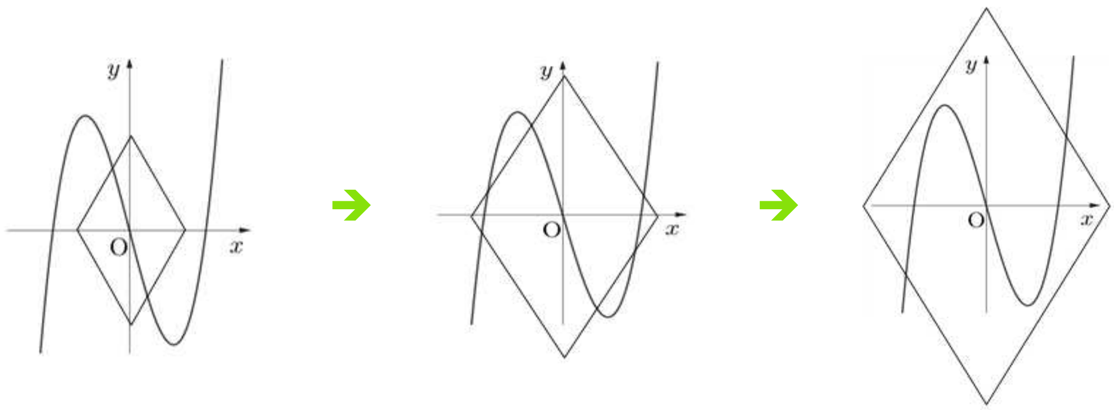
[Case C]



Case A도 다음 그림과 같이 $t=\{x \mid f(x)=0,\ x>0\}$일 때 만나는 점의 개수가 2라면,
t의 값에 상관없이 만나는 점의 개수가 항상 2이다.



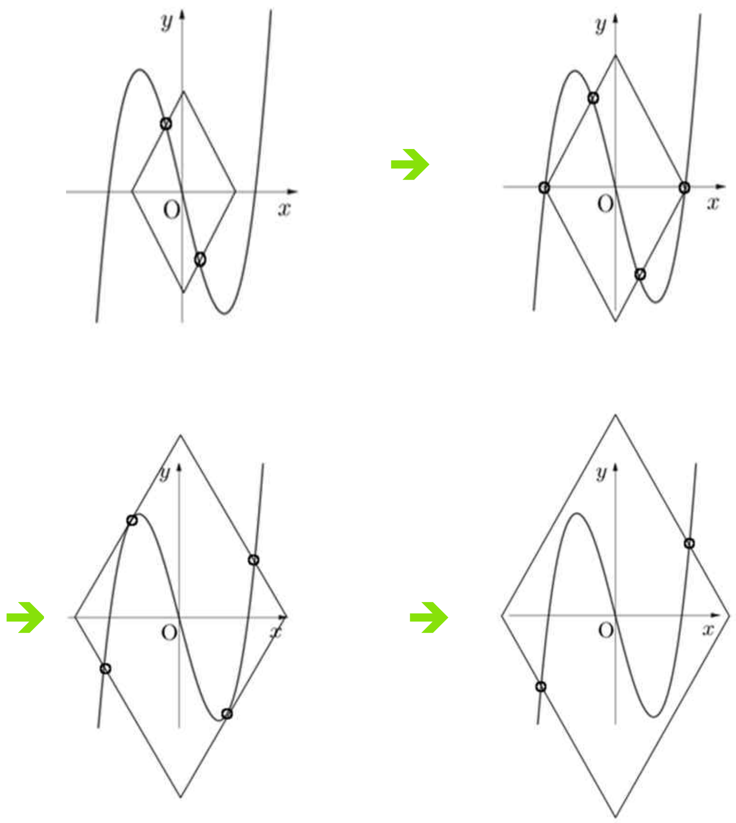
그럼 그래프를 조금 다르게 그려서 $t=\{x \mid f(x)=0,\ x>0\}$일 때 만나는 점의 개수가 4라면 어떻게 될까?



전체적으로 만나는 점의 개수가 조금씩 바뀜을 알 수 있다.
이제 $g(t)$라는 함수를 파악해봤으니, 문제를 풀어보자.

STEP 2 **어디에서 불연속일까?**

방금 찾은 그래프의 모양이 불연속인 지점이 존재했다. 조금 더 자세히 그려보자.



t 의 값이 점점 커질수록 2개 → 4개 → 6개 → 4개 → 2개가 됨을 알 수 있다.
특히 2번째 그래프의 상황과 4번째 그래프의 상황에서 개수가 변하는 걸 알 수 있다.
따라서 $g(t)$ 를 다음과 같은 꼴로 표현할 수 있다.

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (0<t<?) \\ 4 & (t=?) \\ 6 & (?<t<?) \\ 4 & (t=?) \\ 2 & (t>?) \end{cases}$$

문제 조건이 $t=\alpha$, $t=8$ 에서 $g(t)$ 가 불연속이라고 했으니 2번째 그래프가 $t=\alpha$ 인 상황, 4번째 그래프가 $t=8$ 인 상황일 것이다. 따라서 함수 $g(t)$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (0<t<\alpha) \\ 4 & (t=\alpha) \\ 6 & (\alpha<t<8) \\ 4 & (t=8) \\ 2 & (t>8) \end{cases}$$

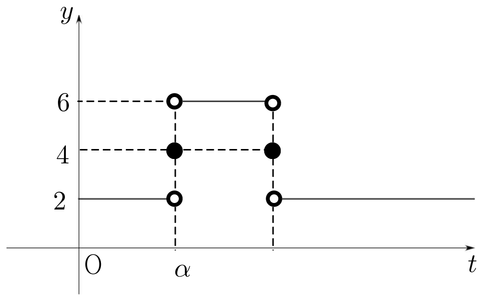
〈 개수 함수의 그래프 그리기 〉

이 문제에서는 그래프를 그리지 않아도 문제를 해결할 수 있으나,

개수 함수에 대해 더 이해해보기 위해서 그래프를 그려보자.

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (0<t<\alpha) \\ 4 & (t=\alpha) \\ 6 & (\alpha<t<8) \\ 4 & (t=8) \\ 2 & (t>8) \end{cases}$$

의 그래프는 어떻게 그릴 수 있을까?



그냥 불연속적인 함수의 그래프라고 생각하고 편하게 그리면 된다.

만약 문제를 풀다가 그래프가 필요한 문제가 나온다면 당황하지 말고 위의 그림과 같이 불연속적인 함수라고 생각하고 그려보자.

STEP 3 **마무리 하기**

우리가 알고 있는 정보는

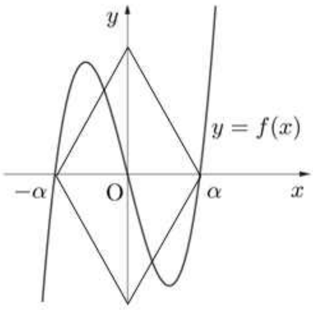
1. $t=\alpha$ 일 때 마름모의 꼭짓점이 삼차함수와 x 축과의 교점과 만난다는 것,

2. 그리고 $t=8$ 일 때 마름모의 두 변이 삼차함수와 접한다는 것

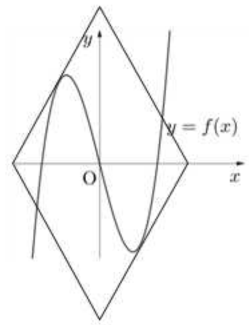
이다.

먼저 $t=\alpha$ 일때는 우리가 무엇을 알 수 있을까?

$t=\alpha$ 일 때 마름모의 꼭짓점은 $(\alpha,\ 0)$, $(-\alpha,\ 0)$, $(0,\ 2\alpha)$, $(0,\ -2\alpha)$ 이므로 삼차함수가 $(\alpha,\ 0)$ 과 $(-\alpha,\ 0)$ 을 지남을 알 수 있다. 이때, 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x(x-\alpha)(x+\alpha)$ 임을 알 수 있다.



$t=8$일 때를 보면 다음과 같다.



$t=8$일 때 마름모의 각 꼭짓점은 $(8,\ 0)$, $(-8,\ 0)$, $(0,\ 16)$, $(0,\ -16)$이고, 점 $(-8,\ 0)$와 점 $(0,\ 16)$를 지나는 직선은 $y=2x+16$이므로 삼차함수 $f(x)$가 직선 $y=2x+16$와 접한다는 사실을 이용할 수 있다.

접점의 좌표를 $(p,\ f(p))$라고 가정하면

$f(p)=2p+16$, $f'(p)=2$라는 두 개의 식을 얻을 수 있고,

이때, $f(x)=x^3-\alpha^2 x$이므로

$p^3-\alpha^2 p=2p+16$, $3p^2-\alpha^2=2$이다.

이를 연립하면 $p=-2$, $\alpha=\sqrt{10}$임을 알 수 있다.

$\alpha^2\times f(4)$는 어렵지 않게 계산할 수 있을 것이다. **[정답]** 240

만약 개수 함수가 불연속이라는 조건이 나온다면 함수의 변수를 조금씩 움직여보면서

개수가 어디서 변하는지 살펴보면 된다.

조건이 어떻게 나오든 결국 직접 함수를 그려보면서 개수 함수가 어떤 함수인지 파악해보는 것이 중요하다는 것을 기억하자.

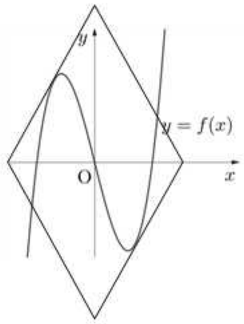
★ STYLE 03 부록 - 개수 함수의 극한 구하기

방금 전 문제에서 함수 $g(t)$의 극한을 구해보자.

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (0<t<\sqrt{10}) \\ 4 & (t=\sqrt{10}) \\ 6 & (\sqrt{10}<t<8) \\ 4 & (t=8) \\ 2 & (t>8) \end{cases}$$

에서 $\lim_{t \to 8-} g(t)=6$, $\lim_{t \to 8+} g(t)=2$라는 것을 쉽게 구할 수 있다.

하지만 이렇게 식을 구하지 않고 그림을 그리면서 판단을 할 수도 있다.



그림과 같이 $t=8$일 때, 마름모와 $y=f(x)$가 4개의 점에서 만나므로 $g(8)=4$이다.

여기서 t가 증가하여 마름모가 조금 더 커진다면 2개의 점에서 만나므로 우극한은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lim_{t \to 8+} g(t)=2$$

반대로 t가 감소하여 마름모가 조금 더 작아진다면 6개의 점에서 만나므로 좌극한은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lim_{t \to 8-} g(t)=6$$

.

CHECK 01 개수 함수의 핵심은 결국 직접 움직여보는 것!

$f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수이든,
$y=f(x)$ 와 $y=tx+a$ 가 만나는 점의 개수이든,
두 도형이 만나는 점의 개수이든
개수 함수 $g(t)$ 가 나온다면 ($h(t)$, $g(m)$ 등, 여러 형식으로 나올 수 있다.)
직접 변수(t)를 움직여보면서 함수를 파악해야 한다.

CHECK 02 미분가능하지 않은 점의 개수는 뾰족한 점(첨점) 찾기

'미분가능하지 않은 지점의 개수'는 두 가지로 나뉜다.

1. 연속이면서 미분가능하지 않은 점

2. 불연속인 지점

1번째 경우는 이어지지만 뾰족한 곳(첨점)을,
2번째 경우는 이어지지 않고 끊어진 곳을 집중해서 보도록 하자.
또, 정확한 파악을 위해서는 그림만이 아닌 **계산도 필요함**을 잊지 말자.

CHECK 03 개수 함수의 불연속은 개수가 바뀌는 곳!

개수 함수가 어떤 함수인지 파악하기 위해 변수를 조금씩 움직여보기로 했다면

개수가 변하는 곳이 불연속인 곳임을 기억하자.

$\lim_{t \to a-} f(t)$, $f(t)$, $\lim_{t \to a+} f(t)$ 세 개 중 하나만 다르더라도 $f(t)$는 $t=a$에서 불연속이다.

필요하다면 그래프도 같이 그려가며 살펴보자.

CHECK 04　개수 함수의 극한은 변수를 조금씩 변화시키며 확인하기!

$f(t)$ 라는 개수 함수가 있다고 할 때, $\lim_{t \to a+} f(t)$, $\lim_{t \to a-} f(t)$ 는

먼저 $t=a$ 에서의 함숫값을 생각해본 뒤,

우극한은 a 보다 조금 더 크게

좌극한은 a 보다 조금 더 작게

변수(t)를 조정해서 개수를 세어보면 된다. (함수를 상황별로 직접 구해서 판단해도 무방하다.)

CHECK 05　함수에 익숙해지기!

해당 챕터의 문제들은 '개수 함수'로 표현을 바꾸었을 뿐, 사실상 삼차함수의 실근의 개수, 삼차함수의 그래프 개형 등에 대해서 물어보는 문제이다. 삼차함수뿐만 아니라 사차함수, 로그함수, 지수함수 등 다양한 함수들에 대해서도 문제에서 물어볼 수 있으니 고등학교에서 배우는 함수들에 대해서는 익숙해지도록 하자.