2023학년도 모의논술

# 논술시험(자연계)

□ 답안작성 유의사항

가. 시험 시간은 100분이며, 문제별 답안은 반드시 문제별로 해당되는 답안 작성영역에 작성해야 합니다.(문제번호와 답안번호는 반드시 일치해야 합니다.)

나. 문제별로 해당되는 답안 작성영역에 다른 문제의 답안을 작성한 경우 평가하지 않습니다.

다. 답안은 지정된 작성영역 내에 작성해야 하며, 지정된 작성영역을 초과하여 작성한 부분에 대해서는 평가하지 않습니다.

라. 답안 작성영역에는 어떠한 경우에도 인적사항을 기재하면 안됩니다. 인적사항(성명, 서명 등) 또는 답안과 관계없는 표기를 하는 경우 결격처리 될 수 있습니다.

마. 흑색 필기구를 사용해야 합니다.(연필·샤프 사용가능, 답안작성 중 필기구 종류 또는 색상 변경 불가)

바. 답안 수정 시에는 취소선을 긋거나 지우개로 지워야 하며 수정액이나 수정테이프는 사용할 수 없습니다.

사. 답안지 전면 상단에 본인의 인적사항(모집단위, 수험번호, 성명 등)을 기재하고, 감독위원의 확인을 받아야 합니다.

성균관대학교
SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY

# 논술시험 (자연계)

[문제 1] 다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 [문제 1-ⅰ] ~ [문제 1-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문 1>
자연수 $n$에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 $n$에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
(a) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
(b) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

<제시문 2>
두 사건 $A, B$가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 $A$와 사건 $B$가 일어나는 경우의 수를 각각 $m, n$이라고 하면 사건 $A$ 또는 사건 $B$가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

<제시문 3>
두 정수 $a$와 $b$에 대하여 이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 두 근을 $\alpha$와 $\beta$라고 할 때(단, $\alpha \le \beta$), 모든 자연수 $n$에 대하여

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}\beta^k = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n$$

으로 정의하자.

[문제 1-ⅰ] <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{f_n\}$에 대하여,

$$f_{n+2} = -af_{n+1} + bf_n$$

이 모든 자연수 $n$에 대해 성립함을 보이시오. (10점)

[문제 1-ⅱ] <제시문 1>의 수학적 귀납법을 이용하여 <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{f_n\}$의 모든 항이 정수라는 사실을 보이시오. (10점)

[문제 1-ⅲ] 동전을 5번 던져 앞면이 $a$번 나오고 뒷면이 $b$번 나왔다고 할 때, 절댓값 $|f_5|$의 값이 $1000$보다 클 경우의 수를 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

# 논술시험 (자연계)

[문제 2] 다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 [문제 2-ⅰ] ~ [문제 2-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문 1>

자연수의 거듭제곱의 합은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

<제시문 2>

첫째항이 $a$, 공차가 $d$인 등차수열의 제$n$항을 $l$이라 하고, 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라고 하면

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

이다.

<제시문 3>

음이 아닌 정수 $x$가, 음이 아닌 정수 $a$와 $b$에 대해 $3x = 15a - 25b - 2$를 만족할 때, 이러한 모든 $x$의 집합을 $S$라고 하자. 그리고, 집합 $S$의 원소를 작은 수부터 차례대로 $a_1, a_2, a_3, \cdots$로 나타내자.

[문제 2-ⅰ] <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $a_{100}$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오. (10점)

[문제 2-ⅱ] <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $\sum_{n=11}^{20} a_n^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{20}^2$의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

[문제 2-ⅲ] <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{a_n\}$과 상수 $c$에 대하여, 일반항이 $b_n = a_n - c(n-1)$인 수열 $\{b_n\}$을 정의하고, 이 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $T_n$이라고 하자. 비 $T_n : T_{2n}$이 $n$의 값에 관계없이 일정하기 위한 $c$의 값을 모두 구하고, 그 이유를 논하시오. (15점)

# 논술시험 (자연계)

[문제 3] 다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 [문제 3-ⅰ] ~ [문제 3-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문 1>

실수 $x$의 절댓값 $|x|$는 수직선 위에서 실수 $x$를 나타내는 점과 원점 사이의 거리를 나타낸다. 예를 들어, $|x|=5$이면 $x=5$ 또는 $x=-5$이다.

<제시문 2>

함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 $x$에 대하여 $f(x) \le f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하며, $f(a)$를 극댓값이라고 한다. 또, $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 $x$에 대하여 $f(x) \ge f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라 하며, $f(a)$를 극솟값이라고 한다. 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

<제시문 3>

<제시문 1>을 이용하여 실수 전체에서 정의되는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{cases} f(x)=x-|x+2|+|x+1|-|x-1|+|x-2| \\ g(x)=|x|^3-x^2 \end{cases}$$

그리고, 이 두 함수의 합성함수를 $h(x)=(g \circ f)(x)=g(f(x))$라고 하자.

[문제 3-ⅰ] <제시문 3>에서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대일 때, 가능한 $a$의 값을 모두 구하고 그 이유를 논하시오. (10점)

# 논술시험 (자연계)

[문제 3 - ii ] <제시문 3>에서 정의된 함수 $h(x)$가 $x=a$에서 극대이기 위한 $a$의 절댓값의 합과 $x=b$에서 극소이기 위한 $b$의 절댓값의 합을 각각 구하고, 그 이유를 논하시오. (15점)

[문제 3 - iii ] <제시문 3>에서 정의된 함수 $h(x)$에 대하여 정적분 $\int_{-2}^{2} h(x)\,dx$ 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

# SKKU NEWS

## 2022 THE 세계대학 평가

# 국내 종합 사립대 1위 '성균관대'

### 성대, THE 세계대학평가 7년 연속 국내종합사립대 1위.. "사학명문에서 글로벌 리더로 우뚝"

[아시아투데이 안정환 기자] 623년 전통 사학명문에서 글로벌 리더로 우뚝 선 성균관대학교(총장 신동렬)가 THE (Times Higher Education) 세계대학평가에서 7년 연속 국내종합사립대 1위를 하면서 사학명문에서 글로벌 리더로 비약적인 발전을 하고 있다.


성균관대는 최근 세계적 권위를 자랑하는 THE가 지난 9월 발표한 2022 세계대학 순위(세계대학 순위(World University Rankings 2022)에서 122위를 차지하며 2014년 이래 7년 연속 국내 종합사립대학 1위 자리를 지키고 있다.

작년에 이어 올해도 영국 옥스퍼드대가 세계 1위로 선정되었으며, 국내 대학은 서울대·KAIST·성균관대가 수년째 톱3 체제를 굳히고 있다. 성균관대는 THE 세계대학순위뿐만 아니라 공신력있는 국내외 대학평가에서도 우수한 평가를 받으며 대학교육 혁신을 선도하는 명문대학으로의 위상을 확고히 하고 있다.

로이터 세계혁신대학평가에서 4위, QS세계대학평가 3위, US뉴스&월드리포트 글로벌대학평가 2위로 선정되었으며, '중앙일보 대학평가' 종합평가에서도 2019년까지 3년 연속 국내 종합사립대 1위 자리를 놓치지 않고 있다. (2020년은 코로나19 확산으로 미발표)

안정환 기자 gkrphupkr@asiatoday.co.kr

(성균관대학교 전경 / 사진 = 성균관대)

2023학년도 모의논술

# 논술문제 해설지
# 자연계

[ 교사용 ]

성균관대학교
SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

# 논술문제 해설지 (자연계)

[ 문제 1 ]

■ 개요 및 주요 평가항목

이차방정식의 근과 계수의 관계를 통해 귀납적으로 특정 수열을 정의한 뒤, 이 수열로부터 파생되는 다양한 주제의 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가하는 문제이다. 본 문제는 고교 과정 중, 수학적 귀납법, 경우의 수, 이차방정식의 근과 계수의 관계 등을 이해하고 있으면 해결할 수 있는 문제로, 합의 기호에 대한 내용을 포함한다.

[문제 1 – i ]

근과 계수의 관계를 올바르게 이해하고 있다.

[문제 1 – ii ]

수학적 귀납법을 올바르게 사용할 수 있다.

[문제 1 – iii ]

수열의 항을 귀납적으로 구한 뒤, 경우의 수를 구할 수 있다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

■ 예시답안 및 채점기준

[문제 1 − i ]

○ 예시답안

먼저, $-af_{n+1}+bf_n=(\alpha+\beta)\left(\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{n+1-k}\beta^k\right)-(\alpha\beta)\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}\beta^k\right)$

$$\begin{aligned}&=\left(\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{n+2-k}\beta^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{n+1-k}\beta^{k+1}\right)-\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n+1-k}\beta^{k+1}\right)\\&=\left(\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{n+2-k}\beta^k\right)+\beta^{n+2}\\&=f_{n+2}\end{aligned}$$

가 성립한다.

○ 채점기준

(2점) 근과 계수의 관계로부터 $\alpha+\beta=-a$와 $\alpha\beta=-b$를 구할 수 있다.

(8점) $f_{n+2}=-af_{n+1}+bf_n$ 을 보일 수 있다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

[문제1 – ii]

○ 예시답안

자연수 $n$에 대하여 명제 $p(n)$을 "$f_n$과 $f_{n+1}$이 정수이다"로 설정하자. $f_1=\alpha+\beta=-a$이고, $f_2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=a^2+b$이므로 두 수 모두 정수이다.

따라서, 명제 $p(n)$은 $n=1$일 때 참이다.

명제 $p(n)$이 $n=k$일 때 참이라고 가정하면, $f_k$와 $f_{k+1}$이 정수이다.

이때, $f_{k+2}=-af_{k+1}+bf_k$이므로, $f_{k+2}$도 정수이다.

즉, $f_{k+1}$과 $f_{k+2}$가 정수이므로 명제 $p(n)$이 $n=k+1$일 때 참이다.

따라서, 수열 $\{f_n\}$의 모든 항이 정수이다.

○ 채점기준

(5점) 명제 $p(n)$을 올바르게 설정할 수 있다.

(5점) 수학적 귀납법을 사용하여 수열 $\{f_n\}$의 모든 항이 정수임을 보일 수 있다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

[문제1 −iii]

○ 예시답안

동전을 5번 던져 나올 수 있는 $(a,b)$는 아래의 여섯가지이다.

$$(0,5), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (5,0)$$

각각에 대해서 [문제1−i]의 결과를 적용시키면 아래와 같은 표를 얻을 수 있다.

| $(a,b)$ | $f_{n+2}$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(0,5)$ | $5f_n$ | $0$ | $5$ | $0$ | $25$ | $0$ |
| $(1,4)$ | $-f_{n+1}+4f_n$ | $-1$ | $5$ | $-9$ | $29$ | $-65$ |
| $(2,3)$ | $-2f_{n+1}+3f_n$ | $-2$ | $7$ | $-20$ | $61$ | $-182$ |
| $(3,2)$ | $-3f_{n+1}+2f_n$ | $-3$ | $11$ | $-39$ | $139$ | $-495$ |
| $(4,1)$ | $-4f_{n+1}+f_n$ | $-4$ | $17$ | $-72$ | $305$ | $-1292$ |
| $(5,0)$ | $-5f_{n+1}$ | $-5$ | $25$ | $-125$ | $625$ | $-3125$ |

위의 표에서와 같이 절댓값 $|f_5|$의 값이 1000보다 큰 경우는 $(a,b)$가 $(4,1)$ 또는 $(5,0)$ 인 경우이다. 즉, 동전을 5번 던져 앞면이 4번 이상 나오는 경우이다.

동전의 앞면이 4번 나오는 경우는 5가지이고,

앞면이 5번 나오는 경우는 1가지이므로, 모두 6가지이다.

○ 채점기준

(7점) 가능한 $f_5$의 값을 모두 구할 수 있다.

(3점) 경우의 수를 올바르게 구할 수 있다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

[ 문제 2 ]

■ 개요 및 주요 평가항목

특정한 정수의 곱과 합으로 정의되는 집합의 원소들을 등차수열의 항으로 이해한 다음, 다양한 종류의 합과 이와 관련한 현상들을 탐구하는 능력을 평가하는 문제이다. 본 문제는 고교과정 중, 집합과 명제, 등차수열과 여러 가지 수열의 합 등을 이해하고 있으면 해결할 수 있는 문제로, 자연수에 대한 기본적인 이해와 등차수열의 합에 대한 내용을 포함한다.

[문제2 – i ]

등차수열의 일반항을 올바르게 유도할 수 있다.

[문제2 – ii ]

거듭제곱의 합을 구할 수 있다.

[문제2 – iii ]

등차수열의 합을 올바르게 구할 수 있다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

■ 예시답안 및 채점기준

[문제2 - i ]

○ 예시답안

$3x+2=15a-25b=5(3a-5b)$이므로, $3x+2$는 5의 배수이다.

따라서, $x=5k+1$의 꼴이다. 이를 다시 대입하면, $3k+1=3a-5b$를 얻게 된다.

여기서, $x$는 음이 아닌 정수이므로, $k$도 음이 아닌 정수이다.

$(a,b)=(2,1)$을 대입하면, $3a-5b=1$을 얻게 되므로, $3k+1$꼴의 음이 아닌 정수는 항상 $3a-5b$의 형태로 쓰여지게 된다.

이로부터 집합 $S$는 $5k+1$꼴의 음이 아닌 정수들의 집합이고, $a_n=5n-4$임을 알 수 있다.

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 5인 등차수열이다.

따라서, $a_{100}=496$이다.

○ 채점기준

(8점) 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.

(2점) 수열의 100번째 항을 구할 수 있다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

[문제2 - ii]

○ 예시답안

제시문을 이용하여 $\sum_{n=1}^{m} a_n^2 = \sum_{n=1}^{m} (5n-4)^2$

$$= 25\left(\sum_{n=1}^{m} n^2\right) - 40\left(\sum_{n=1}^{m} n\right) + 16\left(\sum_{n=1}^{m} 1\right)$$

$$= \frac{25m(m+1)(2m+1)}{6} - 20m(m+1) + 16m$$

$$= \frac{m(50m^2 - 45m + 1)}{6}$$

을 얻게 된다. 소문항의 식은 $\sum_{n=1}^{20} a_n^2 - \sum_{n=1}^{10} a_n^2$이므로, $m = 10, 20$일 때 계산한 다음, 빼주면 된다. 즉, $\frac{20(50 \times 20^2 - 45 \times 20 + 1)}{6} - \frac{10(50 \times 10^2 - 45 \times 10 + 1)}{6} = 56085$이다.

○ 채점기준

(3점) $\sum_{n=1}^{20} a_n^2 - \sum_{n=1}^{10} a_n^2$을 고려할 수 있다.

(7점) 거듭제곱의 합을 올바르게 구할 수 있다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

[문제2 − iii]

○ 예시답안

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 $p = 5 - c$인 등차수열이다. 따라서,

$$T_n = \frac{n\{2 + (n-1)p\}}{2}$$

이다. 비 $\dfrac{T_{2n}}{T_n} = k$가 일정하다면,

$$\frac{2n\{2 + (2n-1)p\}}{2} = \frac{kn\{2 + (n-1)p\}}{2}$$

가 성립한다. 양변을 $n$으로 나눈 다음 정리하면,

$$(4-k)pn = (k-2)(2-p)$$

을 얻게 된다. 따라서 $(4-k)p = 0$이므로, $k = 4$ 또는 $p = 0$이고 이로부터 $k = 4$일 때, $p = 2$이고 $p = 0$일 때, $k = 2$이다. 따라서 이로부터 $c = 5$ 또는 3이다.

○ 채점기준

(3점) $T_n$을 식으로 표현할 수 있다.

(9점) 식 $(4-k)pn = (k-2)(2-p)$을 유도할 수 있다.

(3점) $c$의 값을 모두 구할 수 있다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

[ 문제 3 ]

■ 개요 및 주요 평가항목

절댓값이 포함된 합성함수의 극대, 극소와 정적분 계산을 적절한 대칭성을 활용하여 구할 수 있는 능력을 평가하는 문제이다. 본 문제는 고교 과정 중, 도형의 이동, 함수의 극대와 극소, 다항함수의 정적분을 이해하고 있으면 해결할 수 있는 문제로, 절댓값과 합성함수에 대한 기본적인 내용을 포함한다.

[문제3 – i ]

절댓값의 성질을 이용하여 함수의 그래프를 그릴 수 있다.

[문제3 – ii ]

함수의 극댓값과 극댓값을 가지는 점의 좌표를 구할 수 있다.

[문제3 – iii ]

정적분의 값을 올바르게 구할 수 있다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

■ 예시답안 및 채점기준

[문제3 - i ]

○ 예시답안

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x-|-x+2|+|-x+1|-|-x-1|+|-x-2| \\ &= -x-|x-2|+|x-1|-|x+1|+|x+2| \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

이므로, $y=f(x)$는 원점에 대해 대칭이다.

닫힌구간 $[0,1]$에서 $f(x)=x$이다.

닫힌구간 $[1,2]$에서 $f(x)=-x+2$이다.

구간 $[2,\infty)$에서 $f(x)=x-2$이다.

따라서, $x=a$에서 극댓값을 가지기 위한 $a$의 값은 $-2, 1$이다.

○ 채점기준

(7점) $y=f(x)$의 식을 구할 수 있다.

(3점) 극댓값을 가지는 $x=a$의 값을 구할 수 있다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

[문제3 – ii]

○ 예시답안

$g(-x)=|-x|^3-(-x)^2=|x|^3-x^2=g(x)$이므로, 함수 $y=g(x)$는 $y$축에 대해 대칭이다. 따라서, $h(-x)=g(f(-x))=g(-f(x))=g(f(x))=h(x)$이므로 함수 $y=h(x)$도 $y$축에 대해 대칭이다. 이제 $x \geq 0$일 때, 함수 $y=h(x)$를 살펴보자.

닫힌구간 $[0,1]$에서 $h(x)=g(x)=x^3-x^2$이다.

닫힌구간 $[1,2]$에서 $h(x)=g(-x+2)=(x-2)^2(1-x)$이므로, 닫힌구간 $[0,1]$에서의 함수 $h(x)=g(x)=x^3-x^2$를 직선 $x=1$에 대해 대칭이동시킨 것이다.

구간 $[2,\infty)$에서 $h(x)=g(x-2)$이므로, 구간 $[0,\infty)$에서의 함수 $g(x)=x^3-x^2$를 $x$축 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 것이다. 따라서, $x=0,1,2$에서 극댓값을 가진다.

$g'(x)=3x^2-2x=0$으로부터 $x=\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3}$에서 극솟값을 가진다.

대칭성에 의해, $x=-2,-1$에서도 극댓값을 가지고, $x=-\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{8}{3}$에서도 극솟값을 가진다.

따라서, 극댓값을 가지는 $x=a$의 절댓값의 합은 $0+2(1+2)=6$이고, 극솟값을 가지는 $x=b$의 절댓값의 합은 $2\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{8}{3}\right)=\frac{28}{3}$이다.

○ 채점기준

(5점) 함수 $h(x)$를 구할 수 있다.

(5점) 함수 $h(x)$의 극댓값을 가지는 점 $x=a$를 모두 구할 수 있다.

(5점) 함수 $h(x)$의 극솟값을 가지는 점 $x=b$를 모두 구할 수 있다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

[문제3 −iii]

○ 예시답안

함수 $h(x)$는 $y$축에 대해 대칭이므로 $\int_{-2}^{2} h(x)\,dx = 2\int_{0}^{2} h(x)dx$이다. 닫힌구간 $[0,2]$에서 함수 $h(x)$는 직선 $x=1$에 대해서 대칭이므로 $\int_{0}^{2} h(x)dx = 2\int_{0}^{1} h(x)dx$이다.

따라서, $\int_{-2}^{2} h(x)dx = 4\int_{0}^{1} h(x)dx = 4\int_{0}^{1} (x^3 - x^2)dx = -\frac{1}{3}$이다.

○ 채점기준

(8점) $\int_{-2}^{2} h(x)dx = 4\int_{0}^{1} h(x)dx = 4\int_{0}^{1} (x^3 - x^2)dx$을 유도할 수 있다.

(2점) 적분값을 구할 수 있다.