2023학년도 모의논술고사

자연계열

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 3

[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려보면 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있다. 특히 함수 $f(x)$가 미분가능하면, 도함수 $f'(x)$를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 알 수 있다. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[p,q]$에서 연속이면 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가지며, 이는 극솟값, 극댓값, $f(p)$, $f(q)$의 값을 비교하여 구할 수 있다.

(나) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$이다. 이 접선이 점 (x_0, y_0)를 지나면 다음을 만족한다.

$$(y_0-f(t))=f'(t)(x_0-t)$$

(다) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여, 곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 $(p, f(p))$와 $(q, f(q))$를 각 접점으로 가지는 두 접선이 일치하는 경우, 그 접선의 기울기를 생각하여 보면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$f'(p)=f'(q)=\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$$

[문제 1-1] (20점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하여라.

(1) 닫힌구간 $[a-2, a+2]$에서 이차함수 $y=2x^2-4x+a$가 최솟값 20을 갖도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하여라.

(2) 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 함수 $f(x)=x+\sin 4x-1$의 최솟값을 구하여라.

[문제 1-2] (30점) 제시문 (나)와 (다)를 읽고 물음에 답하여라.

(1) 곡선 $y=2x^2-3x-5$에 대한 서로 다른 두 접선이 모두 점 $(-1,-2)$를 지날 때, 이 곡선과 두 접선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.

(2) 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점에서의 접선은 일치할 수 없음을 보여라.

(3) 곡선 $y=x^3-3x^2-2$에 대한 서로 다른 세 접선이 모두 점 (x_0, y_0)를 지난다. 자연수 x_0, y_0에 대하여, x_0+y_0의 최솟값을 구하여라.

[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 음이 아닌 정수 n에 대하여 n이하의 양의 정수의 집합을 P_n이라 하자. 어떤 양의 정수 k에 대하여 P_k의 원소로 이루어진 순서쌍 (a, b) (단, $1 \le a < b \le k$) 중 일부를 원소로 갖는 집합을 S라 할 때, 다음 <조건>을 만족하는 함수 $f : P_k \to P_n$의 개수를 $g(n)$이라 하자.

< 조 건 >

$(a, b) \in S$이면 $f(a) \ne f(b)$이다.

예를 들어 $k=3$이고 $S = \{(1,2), (2,3)\}$이라면 $f(1)$이 될 수 있는 값은 n개, $f(2)$가 될 수 있는 값은 $f(1) \ne f(2)$이므로 $n-1$개, $f(3)$이 될 수 있는 값은 $f(2) \ne f(3)$이므로 $n-1$개이고, 따라서 $g(n) = n(n-1)^2$이다.

일반적으로 $g(n)$은 S와 상관없이 n에 대한 k차 다항식이 되고 최고차항의 계수가 1이라는 사실이 알려져 있다. 이 정보는 $g(n)$을 구할 때 유용하게 쓸 수 있는데, 위의 예에서 $g(0) = g(1) = 0$이고, $g(2) = 2$이므로 이를 이용하여 $g(n)$을 구할 수 있다.

(나) 필즈메달은 국제수학연맹이 4년마다 개최하는 세계 수학자 대회에서 수여하는 상으로 수학계의 가장 권위 있는 상으로 여겨진다. 2022년 열린 세계 수학자 대회에서는 허준이 교수가 한국계 최초로 이 상을 수상하였다. 허 교수는 여러 분야를 아우르는 이론을 제시하였고, 특히 이산수학의 여러 미해결 난제를 해결하였다.

허 교수의 주요 업적 중 하나는 위 제시문 (가)에서 얻어지는 k차 다항식 $g(n)$의 m차 항의 계수의 절댓값을 c_m (단, $m \le k$)라고 할 때, 다음 부등식이 항상 성립하는 것을 증명한 것이다.

$$\text{모든 } 0 < m < k\text{에 대하여 } c_{m-1}c_{m+1} \le c_m^2 \qquad \cdots \quad (*)$$

[문제 2-1] (30점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하여라.

(1) $k=3$이고 S가 공집합일 때, $g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+\cdots+g(24)$를 구하여라.

(2) $k=4$이고 $g(n)=n(n-1)(n-2)^2$이 되도록 하는 S를 하나 제시하고 그 이유를 설명하여라.

(3) 집합 S가 $\{(1,2),\ (2,3),\ (3,4)\}$일 때 <조건>을 만족하는 함수 $f_1 : P_4 \rightarrow P_4$와 집합 S가 $\{(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (1,4)\}$일 때 <조건>을 만족하는 함수 $f_2 : P_4 \rightarrow P_4$가 있다. 합성함수 $F=f_1 \circ f_2 : P_4 \rightarrow P_4$가 $F(1)=F(2)=F(3)=F(4)=1$을 만족하는 순서쌍 (f_1, f_2)의 개수를 구하여라.

[문제 2-2] (20점) 제시문 (가)와 (나)를 읽고 물음에 답하여라.

(1) 초항이 a이고 공차가 d인 등차수열 $\{c_n\}$은 부등식 ($\ast$) 를 만족함을 증명하여라.

(2) 한 고등학생이 주어진 S와 $k=4$에 대하여 함수 $g(n)$을 구한 다음 $g(0)=g(1)=0$, $g(2)=24$, $g(3)=120$이라고 주장하였다. 이 이야기를 들은 고등학생 아주는 이 학생의 계산이 잘못되었다고 예상하였다. 아주는 어떻게 이런 결론을 내릴 수 있었을까?

2023학년도 모의논술고사

자연계열 예시답안 및 채점기준

표지를 제외한 페이지 수 : 4

[1-1] (20점)

(1) (10점) $y=2x^2-4x+a=2(x-1)^2+a-2$이므로, 꼭짓점의 x좌표는 1이고 이것이 구간 $[a-2, a+2]$에 포함되는지에 따라 최솟값을 아래와 같이 구할 수 있다.

① $-1 \le a \le 3$인 경우: 구간 $[a-2, a+2]$에 꼭짓점의 x좌표 1이 포함되므로 $x=1$일 때 최솟값 $a-2=20$을 갖는다. 이때, $a=22$이므로 $-1 \le a \le 3$에 모순이다.

② $a<-1$ 인 경우: $a+2<1$이므로 구간 $[a-2, a+2]$에서 주어진 함수는 감소하고, $x=a+2$일 때 최솟값 $2(a+1)^2+a-2=20$을 갖는다. $2a^2+5a=20$이므로 근의 공식에 의해 $a=\dfrac{-5 \pm \sqrt{185}}{4}$이고, $a<-1$ 이므로 $a=\dfrac{-5-\sqrt{185}}{4}$이다.

③ $a>3$ 인 경우: $a-2>1$이므로 구간 $[a-2, a+2]$에서 주어진 함수는 증가하고, $x=a-2$일 때 최솟값 $2(a-3)^2+a-2=20$을 갖는다. $2a^2-11a+16=20$이고 근의 공식에 의해 $a=\dfrac{11 \pm 3\sqrt{17}}{4}$이고, $a>3$ 이므로 $a=\dfrac{11+3\sqrt{17}}{4}$이다.

따라서, $a=\dfrac{-5-\sqrt{185}}{4}$ 또는 $a=\dfrac{11+3\sqrt{17}}{4}$이다.

(2) (10점) $f'(x)=1+4\cos 4x$이므로, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos 4x=-\dfrac{1}{4}$를 만족하는 x를 θ_1, θ_2 $(\theta_1<\theta_2)$라 두자. 이때, 닫힌구간 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	θ_1	$\cdots$	θ_2	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-1	↗	극댓값	↘	극솟값	↗	$\frac{\pi}{2}$

$x=\theta_2$일 때 $f(x)=x+\sin 4x-1$가 극솟값을 가지므로 $f(0)$과 $f(\theta_2)$ 중 작은 값이 최솟값이 된다.

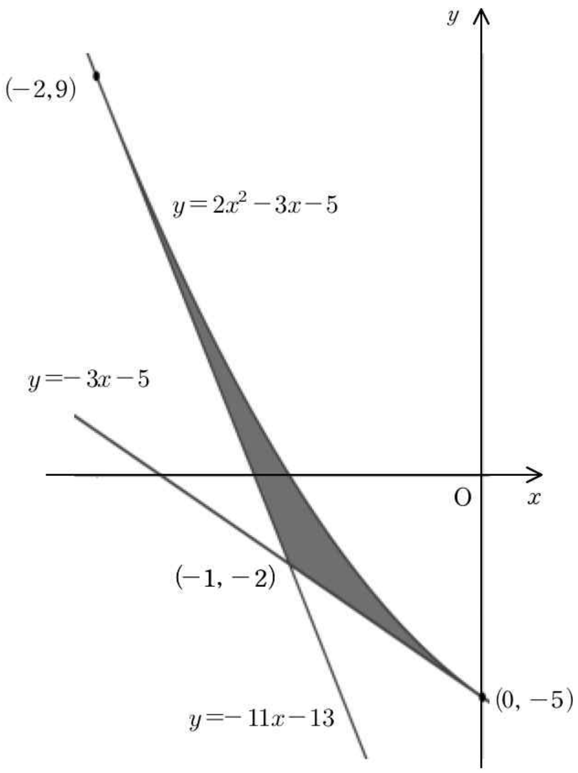
한편, $\dfrac{\pi}{4}<\theta_2<\dfrac{\pi}{2}$이고 $\cos 4\theta_2=-\dfrac{1}{4}$이므로 $\sin 4\theta_2=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$이며,

$\sin 4\theta_2=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\dfrac{4\pi}{3}$이므로 $\theta_2>\dfrac{\pi}{3}$임을 알 수 있다. 따라서,

$f(\theta_2)=\theta_2+\sin 4\theta_2-1>\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{15}}{4}-1>-1=f(0)$이므로 닫힌구간 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=-1$이다.

[1-2] (30점)

(1) (10점) 제시문 (나)에 의해, 주어진 곡선 위의 점 $(t, 2t^2-3t-5)$가 접점인 접선의 방정식이 점 $(-1,-2)$를 지나면 $-2-(2t^2-3t-5)=(4t-3)(-1-t)$를 만족한다. 이것을 풀면 $t=0, -2$이므로, $t=0$일 때 접점 $(0,-5)$에서의 접선의 방정식은 $y=-3x-5$이고, $t=-2$일 때 접점 $(-2,9)$에서의 접선의 방정식은 $y=-11x-13$이다. 따라서, 구하고자 하는 영역은 아래 색칠된 영역과 같다.



색칠된 영역의 넓이를 적분으로 나타내고 계산하면,

$$\int_{-2}^{-1}(2x^2-3x-5)-(-11x-13)\,dx+\int_{-1}^{0}(2x^2-3x-5)-(-3x-5)\,dx=\frac{4}{3}$$

이므로 구하고자 하는 영역의 넓이는 $\frac{4}{3}$이다.

(2) (10점)

주어진 삼차함수 $f(x)$에 대하여, 제시문 (다)에서와 같이 곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 $(p,f(p))$와 $(q,f(q))$에서의 두 접선이 일치한다고 가정하자. 따라서

$f'(p)=f'(q)=\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$를 만족한다. 이때, p와 q는 서로 다르므로 $p<q$라 하자.

삼차함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[p,q]$에서 연속이고 열린구간 (p,q)에서 미분가능하므로, 평균값 정리에 의해 $\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}=f'(c)$이고 $p<c<q$인 c가 적어도 하나 존재한다. 따라서, 제시문 (다)와 평균값 정리에 의해 $p<c<q$인 어떤 c에 대하여 $f'(p)=f'(c)=f'(q)$가 성립한다.

한편, $f'(x)$는 이차함수이고 $f'(p)=f'(c)=f'(q)$을 만족하는 서로 다른 세 실수 p, c, q가

존재할 수 없으므로, 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 서로 다른 두 점에서의 접선이 일치한다는 가정에 모순이다.

(3) (10점)

곡선 $y=x^3-3x^2-2$에 대한 접선이 점 (t, t^3-3t^2-2)에서 접하며 점 (x_0, y_0)를 지난다고 하자.

제시문 (나)에 의해, $y_0-t^3+3t^2+2=(3t^2-6t)(x_0-t)$이므로 이를 t에 대해 정리하면 $2t^3-(3+3x_0)t^2+6x_0t+(y_0+2)=0$이다. $g(t)=2t^3-(3+3x_0)t^2+6x_0t+(y_0+2)$라 두자.

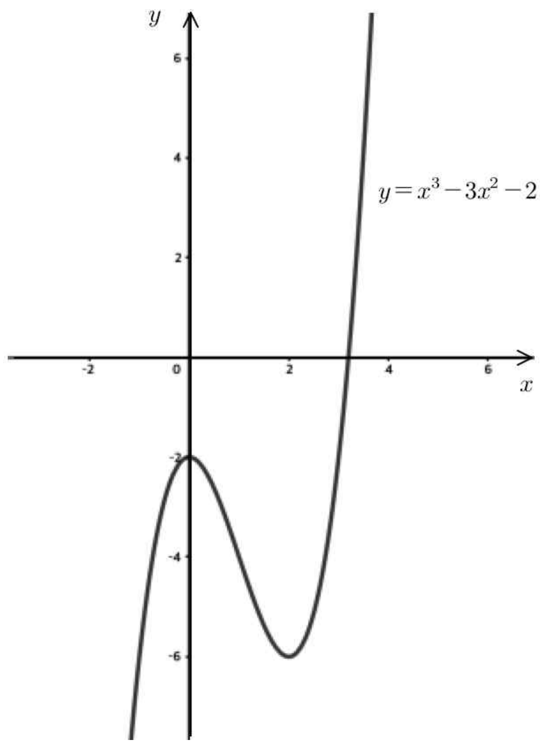
앞의 문항 (2)의 결과로부터 삼차함수의 그래프에 대한 각 접선은 정확히 하나의 접점만을 가져야 하므로, t에 대한 방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 자연수 x_0, y_0를 구하면 된다.

$g'(t)=6t^2-(6+6x_0)t+6x_0=(6t-6)(t-x_0)$이므로 함수 $g(t)$는 $t=1, x_0$일 때 극값을 갖는다. 또한 x_0, y_0는 자연수이므로, $g(1)=3x_0+y_0+1>0$이다.

함수 $g(t)$는 서로 다른 부호의 극값을 가져야 하므로,

$g(x_0)=2x_0^3-(3+3x_0)x_0^2+6x_0^2+(y_0+2)=-x_0^3+3x_0^2+2+y_0<0$이다.

이때, $x_0=3$이면 $g(x_0)=-x_0^3+3x_0^2+2+y_0=2+y_0>0$이므로, $x_0\geq 4$이다. 따라서, $x_0+y_0\geq 5$이므로 구하고자 하는 답은 5이다.



[2-1] (30점)

(1) (10점) $g(n)=n^3$이므로 $g(1)+\cdots+g(24)=\left(\frac{24\cdot 25}{2}\right)^2=300^2=90000$

(2) (10점) $g(n)$이 n, $n-1$, $n-2$를 인수로 가지므로 집합 S가 $(1,2)$, $(2,3)$, $(1,3)$을 원소로 갖고 있는 경우를 생각할 수 있다. $f(4)$가 될 수 있는 값이 $n-2$개가 되어야 하므로 4를 포함하는 S의 순서쌍이 두 개 있어야 한다. 따라서 $S=\{(1,2),(2,3),(1,3),(1,4),(2,4)\}$가 하나의 예가 된다.

*참고. S의 원소의 개수가 다섯 개면 정답.

(3) (10점) 합성함수 $F=f_1\circ f_2$의 모든 값이 1이 되어야 하므로, 집합 $A=\{x\,|\,f_1(x)=1\}$을 생각한다. $S_1=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$라 두고 $S_2=\{(1,2),(2,3),(3,4),(1,4)\}$라 두자.
집합 S_1의 조건으로부터 이웃한 두 자연수의 f_1값이 동시에 1일 수 없으므로 $n(A)\leq 2$임을 알 수 있다. 한편, 함수 f_2의 값은 항상 A에 포함되어야 하므로 집합 S_2의 조건을 사용하면 $n(A)>1$을 얻는다. 따라서 $n(A)=2$이며 가능한 경우는 $A=\{1,3\},\{1,4\},\{2,4\}$의 세 경우뿐이다. 또한 집합 S_2의 조건을 사용하면 함수 f_2는 1에서의 값으로 완전히 결정됨을 알 수 있어, 가능한 f_2의 개수는 집합 A와는 관계없이 항상 2개가 된다.

① $A=\{1,3\}$인 경우, $f_1(2)$와 $f_1(4)$의 값이 2, 3, 4 중 하나이므로 총 $3^2\cdot 2=18$개의 순서쌍 (f_1,f_2)를 얻는다.

② $A=\{1,4\}$인 경우, $f_1(2)$와 $f_1(3)$의 값이 2, 3, 4 중 하나이면서 서로 같지 않아야 하므로 총 $3\cdot 2\cdot 2=12$개의 순서쌍을 얻는다.

③ $A=\{2,4\}$인 경우, ①번 경우와 같은 이유로 18개의 순서쌍을 얻는다.

모든 경우의 수를 더하면 $18+12+18=48$이다.

[2-2] (20점)

(1) (10점) $c_m=a+(m-1)d$이므로, $c_m^2-c_{m-1}c_{m+1}=d^2\geq 0$이다.

(2) (10점) 제시문 (나)에 의하여 $g(n)$은 4차 함수이며, 제시된 조건 $g(0)=g(1)=0$으로 부터 $g(n)=n(n-1)(n^2+an+b)$라 둘 수 있다. $g(2)=24$, $g(3)=120$이므로 이를 풀어보면 $a=3$, $b=2$를 얻는다. 따라서 $g(n)=n^4+2n^3-n^2-2n$이 된다. 한편 $c_2^2=1<c_1c_3=4$이므로 부등식 $(\ast)$를 만족하지 않는다. 따라서 이러한 S는 존재할 수 없다.