2015. 5. 4 배포

2016학년도 포카칩 모의평가 예비시행
수학 영역 (B형) 해설

작성자: 박 상 칠(박수칠@orbi.kr)

1 ⑤

행렬 $-A=\begin{pmatrix}-2 & 9\\ -1 & -a\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합이 1이므로

$-2+9-1-a=1$

$a=5$

2 ②

주어진 극한이 1^{∞}꼴이므로 자연상수 e의 정의를 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\{1+(-x)\}^{-\frac{1}{x}}\right]^{-1}=e^{-1}$$

3 ①

삼각함수의 합성을 이용해서 sin 또는 cos으로 통일한다.

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin x+2\sqrt{6}\cos x+7\\&=\sqrt{1^2+(2\sqrt{6})^2}\sin(x+\alpha)+7\\&=5\sin(x+\alpha)+7\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$의 최솟값은 $\sin(x+\alpha)=-1$일 때 2이다.

4 ③

주어진 정적분에서 $\cos x=t$로 치환하면

아래끝: $x=0$일 때 $t=1$
위끝: $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$
$-\sin x\,dx=dt$

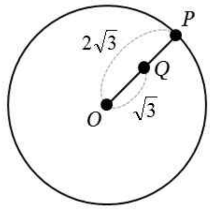
이므로 다음과 같이 계산된다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\times\frac{1}{\cos^3 x}\times\sin x\right)dx$$

$$=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left\{2\times\frac{1}{t^3}\times(-1)\right\}dt=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\left(2\times\frac{1}{t^3}\right)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{t^2}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1=-1+2=1$$

5 ④



선분 PQ의 길이가 최소이려면 오른쪽 그림과 같이 점 P가 선분 OQ의 연장선 위에 존재해야 한다. 이때

$\overline{OP}=$(구의 반지름)$=2\sqrt{3}$

$\overline{OQ}=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

이므로 선분 PQ 길이의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다.

6 ②

변환 $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$의 행렬은

$$\left\{\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right\}^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 4\end{pmatrix}$$

이고, 이 변환에 의해 점 $(2,4)$는 다음의 점으로 옮겨진다.

$$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$$

$\therefore a=0,\ b=2,\ a+b=2$

7 ①

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=3^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$$

8 ②

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다. 따라서

$$P(A\cap B^C)=P(A)\cdot\ P(B^C)=\frac{1}{4}\qquad\cdots\cdots ①$$

$$P(A\cup B^C)=P(A)+P(B^C)-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow\ P(A)+P(B^C)=1\qquad\cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립해서 풀면

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B^C)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{2}$$

이 되고, $P(A\cup B)$의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=P(A)+P(B)-P(A)\cdot\ P(B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

9 ⑤

x, y, z의 값이 0 또는 자연수이므로

$$50 < (x+y+z)^2 < 100$$
$$\sqrt{50} < x+y+z < 10$$
$$x+y+z=8 \text{ 또는 } x+y+z=9$$
가 성립한다.

여기서 $x+y+z=8$을 만족하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$$_3H_8 = {_{10}C_8} = {_{10}C_2} = 45$$
이고, $x+y+z=9$를 만족하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$$_3H_9 = {_{11}C_9} = {_{11}C_2} = 55$$
이므로 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$$45+55=100$$

10 ⑤

수열 $\left\{a_n - \dfrac{3^n+1}{3^n-1}\right\}$의 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{3^n+1}{3^n-1}\right)$가 수렴하므로 이 수열의 극한은 0이다.
$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{3^n+1}{3^n-1}\right)=0$$

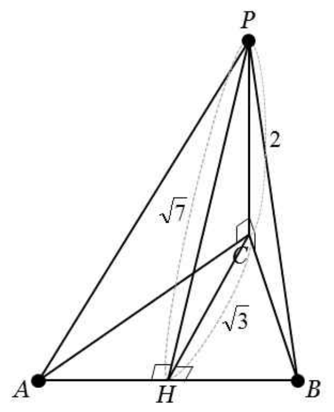
또한 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+1}{3^n-1}=1$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$이다. 따라서
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+5}{a_n+1}=\frac{6}{2}=3$$

11 ③

자동차 공장에서 생산된 타이어 가운데 하나를 뽑아 그 타이어의 주행거리를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(15200, 3200^2)$을 따르며, 20000㎞ 이상 주행할 확률은 다음과 같다.
$$\begin{aligned}P(X \ge 20000) &= P\left(Z \ge \frac{20000-15200}{3200}\right)\\ &= P(Z \ge 1.5) = 0.5 - 0.4332\\ &= 0.0668\end{aligned}$$

12 ②

조건 ㈎에 의해 (직선 PC) $\perp$ (평면 ABC)이고, 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의해 $\overline{AB} \perp \overline{CH}$가 성립한다.



이때, 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 선분 CH는 삼각형 ABC의 중선, $\overline{CH}=\sqrt{3}$이다. 또한 삼각형 PCH가 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의해
$$\overline{PC}=\sqrt{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}=2$$
가 된다.

따라서 삼각형 ACP의 넓이는
$$\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$$

13 ④

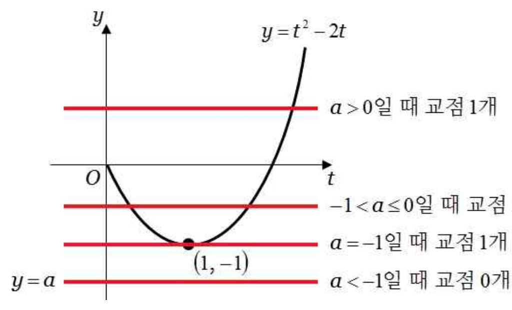
주어진 무리방정식에 $a=3$을 대입하면
$$2\sqrt{x^2-6x}=x^2-6x-3$$
이 되고
$$\sqrt{x^2-6x}=t \Rightarrow x^2-6x=t^2$$
로 치환하면 다음과 같은 t에 대한 방정식이 나타난다.
$$2t=t^2-3$$
$$(t-3)(t+1)=0$$
$$t=3 \text{ 또는 } t=-1$$

무리방정식의 근은 (제곱근 안의 식)≥ 0를 만족하는 실수만 생각하므로 $\sqrt{x^2-6x}=t\ge 0$이고, $t=-1$은 무연근이 된다. 따라서
$$t=3 \Rightarrow x^2-6x-9=0$$
이며, 모든 실근의 곱은 -9가 된다.

14 ③

주어진 무리방정식
$$2\sqrt{x^2-6x}=x^2-6x-a \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$
에서
$$\sqrt{x^2-6x}=t \Rightarrow x^2-6x=t^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$
로 치환하면 다음과 같은 t에 대한 방정식이 나타난다.
$$2t=t^2-a$$
$$t^2-2t=a \ (\text{단, } t\ge 0) \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

t에 대한 방정식 ③의 실근 개수는 두 함수 $y=t^2-2t$ $(t\ge 0)$, $y=a$ 그래프 교점 개수와 같고, a값의 변화에 따라 다음과 같이 나타난다.



또한 x, t 사이의 관계식 ② $x^2-6x-t^2=0$를 x에 대한 방정식으로 보면 판별식이
$$D/4=9+t^2>0$$

이므로 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다. 따라서 t값 1개에 x값 2개가 존재함을 알 수 있다.

그러므로

$a=-2$이면 t의 값이 0개이므로 x의 값도 0개

$a=-1$이면 t의 값이 1개이므로 x의 값은 2개

$a=0$이면 t의 값이 2개이므로 x의 값은 4개

$a=1,\ 2$이면 t의 값이 1개이므로 x의 값은 2개

가 나타난다. 이를 정리하면

$a=-2$이면 무리방정식의 실근이 0개

$a=-1,\ 1,\ 2$이면 무리방정식의 실근이 2개

$a=0$이면 무리방정식의 실근이 4개

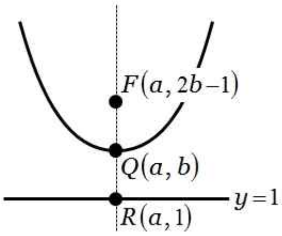
이므로 무리방정식의 서로 다른 실근 개수 X에 대한 확률분포표는 다음과 같다.

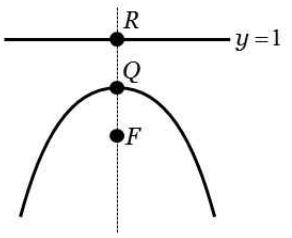
X	0	2	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\therefore E(5X)=5E(X)=5\times\left(0\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+4\times\frac{1}{5}\right)=10$$

15 ①

주어진 조건을 그림으로 나타내면 다음과 같다.





여기서 꼭짓점 Q의 좌표를 (a,b)라 하면 준선과 축의 교점 R의 좌표는 $(a,1)$이고, 선분 FR의 중점이 Q이므로 초점 F의 좌표는 $(a,2b-1)$이 된다.

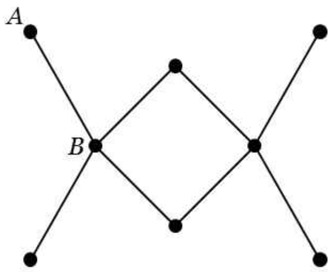
그러므로

$$\begin{aligned}\overline{OF}^2-\overline{OQ}^2&=\{a^2+(2b-1)^2\}-(a^2+b^2)\\&=3b^2-4b+1\\&=3\left(b-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

의 최솟값은 $-\frac{1}{3}$이다.

16 ①

인접행렬에서 $(1,2)$ 성분이 1인 것은 1행에 대응되는 꼭짓점과 2열에 대응되는 꼭짓점을 잇는 변의 개수가 1임을 의미한다. 그리고 2열에 대응되는 꼭짓점은 2행에 대응되는 꼭짓점과 같으므로 문제의 조건을 만족하려면 1개의 변으로 연결된 두 꼭짓점이 1행과 2행에 대응되어야 한다.



또한 위 그래프의 두 꼭짓점 A, B를 각각 1행, 2행에 대응시킨 행렬과 2행, 1행에 대응시킨 행렬은 서로 다르기 때문에 경우의 수를 셀 때는 꼭짓점 위치가 바뀌는 것까지 고려해야 한다.

8개의 꼭짓점 가운데 2개를 뽑아 인접행렬의 1행, 2행에 대응시키는 방법의 수는

$${}_8P_2=8\times7=56$$

이고, 1개의 변으로 연결된 두 꼭짓점을 인접행렬의 1행, 2행에 대응시키는 방법의 수는 「8개의 변 가운데 1개를 뽑고, 그 변과 연결된 두 꼭짓점을 각각 인접행렬의 1행, 2행에 대응시키는 방법의 수」이므로

$${}_8C_1\times2=8\times2=16$$

이다.

따라서 구하는 확률은 다음과 같다.

$$\frac{16}{56}=\frac{2}{7}$$

17 ⑤

먼저 주어진 점화식

$$a_{n+1}=2na_n+(n-1)2^{n+1}$$

의 양변에 2^{n+1}을 더하면 다음과 같다.

$$a_{n+1}+2^{n+1}=2na_n+(n-1)2^{n+1}+2^{n+1}$$

$$a_{n+1}+2^{n+1}=2n\left(a_n+2^n\right)$$

$$\therefore \boxed{(가)}=2^n=f(n)$$

다음으로 $b_{n+1}=2nb_n$에서 n에 1부터 $n-1$까지의 자연수를 대입해서 곱하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}b_2&=2\times1\times b_1\\b_3&=2\times2\times b_2\\b_4&=2\times3\times b_3\\&\vdots\\\times)\quad b_n&=2\times(n-1)\times b_{n-1}\\\hline b_n&=2^{n-1}\times(n-1)!\times b_1=2^{n+1}\times(n-1)!\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{(나)}=2^{n+1}\times(n-1)!=g(n)$$

그러므로

$$\frac{g(6)}{f(9)}=\frac{2^7\times5!}{2^9}=\frac{5!}{4}=5\times3\times2=30$$

18 ④

ㄱ. $A^2B+AB^2=A(AB+B^2)=O$

로부터 행렬 A가 영행렬 또는 영인자일 수 있으므로 A^{-1}이 존재하지 않을 수도 있다. (거짓)

ㄴ. $A^2B+AB^2=O \Rightarrow A^2B=-AB^2$

에 의해 A^3B를 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$A^3B=A(A^2B)=A(-AB^2)=-A^2B^2$$
$$=-(A^2B)B=-(-AB^2)B=AB^3$$
$$\therefore A^3B=AB^3 \text{ (참)}$$

ㄷ. $A(A^3+B^3)=E$에 의해 A^{-1}이 존재하고

$$A^2B+AB^2=O \Rightarrow A(A+B)B=O$$

의 양변 왼쪽에 A^{-1}을 곱하면 다음이 성립한다.

$$(A+B)B=O \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

또한 ㄴ으로부터 $A^3B=AB^3$이므로

$$A(A^3+B^3)=A^4+AB^3=A^4+A^3B$$
$$=A^3(A+B)=E$$

가 성립하고, $(A+B)^{-1}$이 존재한다.

따라서 ①의 양변 왼쪽에 $(A+B)^{-1}$을 곱하면 $B=O$이므로

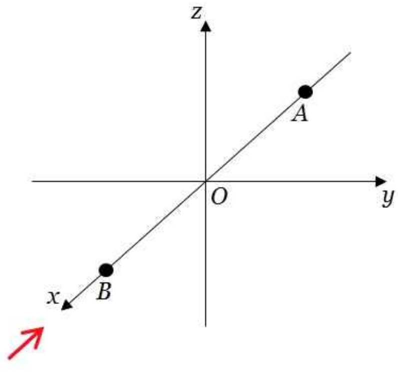
$$A(A^3+B^3)=A^4=E \text{ (참)}$$

19 ④

두 평면 $y+\sqrt{3}z=0$, $\sqrt{3}y-z=0$의 법선벡터

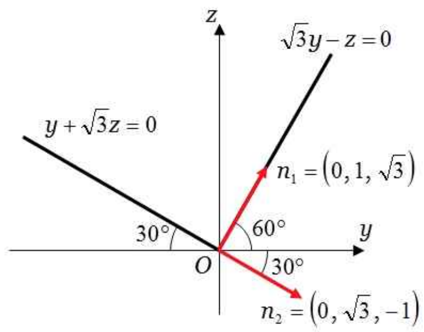
$$\vec{n_1}=(0,1,\sqrt{3}),\ \vec{n_2}=(0,\sqrt{3},-1)$$

는 yz평면과 평행하고, $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$이므로 서로 수직이다. 이 때, 두 평면 $y+\sqrt{3}z=0$, $\sqrt{3}y-z=0$도 yz평면과 수직이므로 아래 그림과 같이 x축의 양의 방향에서 두 평면을 바라본 그림을 그려보자.



먼저 법선벡터 $\vec{n_1}=(0,1,\sqrt{3})$의 시점을 원점 O에 두면 이 벡터와 y축의 양의 방향이 이루는 각은 60°이다. 마찬가지로 법선벡터 $\vec{n_2}=(0,\sqrt{3},-1)$의 시점을 원점 O에 두면 이 벡터와 y축의 양의 방향이 이루는 각은 -30°이다.

이를 이용해서 두 법선벡터 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$와 그에 수직인 두 평면 $y+\sqrt{3}z=0$, $\sqrt{3}y-z=0$을 그리면 다음 그림이 나타난다.



다음으로 두 평면 $y+\sqrt{3}z=0$, $\sqrt{3}y-z=0$ 위의 적당한 위치에 두 점 C, D를 표시하고, 다시 두 점의 xy평면 위로의 정사영 C', D'을 그린다. 그리고 삼각형 ABC'의 넓이가 3이므로

$$\frac{1}{2}\times4\times(\text{점 } C'\text{과 } x\text{축 사이의 거리})=3$$

$$(\text{점 } C'\text{과 } x\text{축 사이의 거리})=\frac{3}{2}$$

이고, 삼각형 ABD'의 넓이도 3이므로

$$\frac{1}{2}\times4\times(\text{점 } D'\text{과 } x\text{축 사이의 거리})=3$$

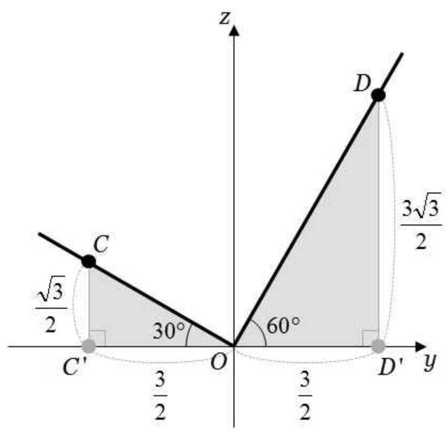
$$(\text{점 } D'\text{과 } x\text{축 사이의 거리})=\frac{3}{2}$$

이 된다.

이를 그림에 나타내면 다음과 같고, 여기서

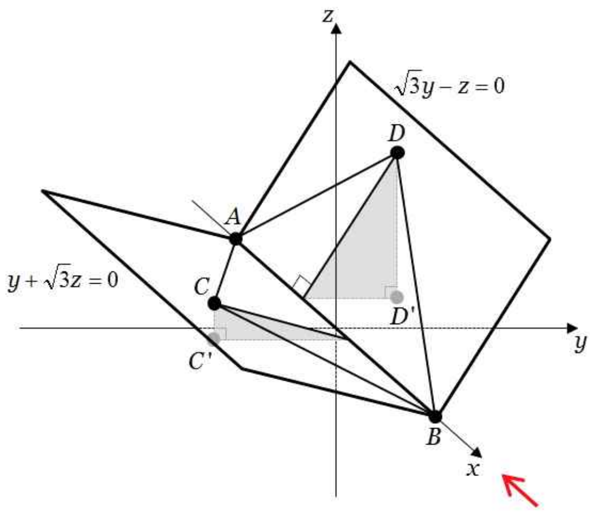
$$\overline{CC'}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \overline{DD'}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

임을 알 수 있다.



이해를 돕기 위해 일반적인 좌표공간에 두 평면 $y+\sqrt{3}z=0$, $\sqrt{3}y-z=0$과 점 A, B, C, D와 정사영 C', D'을 그리면

다음과 같다.



아직 두 점 C, D의 x좌표를 모르기 때문에 각각 c, d로 두면 C, D의 좌표는 각각 $\left(c,\ -\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(d,\ \frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$이 되고, $\overline{CD}=4$에 의해

$$\sqrt{(c-d)^2+(-3)^2+(-\sqrt{3})^2}=4$$
$$(c-d)^2=4$$
$$|c-d|=2$$

가 성립한다.

마지막으로 두 선분 AB, CD가 이루는 각을 구하기 위해 두 벡터 AB, CD를 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\overrightarrow{AB}=(4,\,0,\,0),\ \overrightarrow{CD}=(d-c,\,3,\,\sqrt{3})$$

두 벡터 AB, CD가 이루는 각 θ를 구하기 위해 벡터의 내적을 이용하면 $\cos^2\theta$는 다음과 같이 계산된다.

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{4(d-c)}{4\times4}=\frac{d-c}{4}$$

$$\cos^2\theta=\frac{(d-c)^2}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

20 ③

ㄱ. $f(x)=x^{\ln x}$의 양변에 $\ln$을 잡으면 $\ln f(x)=(\ln x)^2$이고, $x\to+0$일 때

$$\ln x\to-\infty\ \Rightarrow\ (\ln x)^2\to\infty\ \Rightarrow\ \ln f(x)\to\infty$$

이므로 $f(x)\to\infty$이다. 따라서

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty\ \text{(참)}$$

ㄴ. $\ln f(x)=(\ln x)^2$의 양변을 x에 대해 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=(2\ln x)\times\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{(2\ln x)f(x)}{x}=\frac{(2\ln x)\,x^{\ln x}}{x}$$

이므로 함수 $f(x)$의 $x>0$일 때의 증감을 조사하면 다음과 같다. ($x^{\ln x}>0$임에 유의)

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극솟값 1을 갖는다. (참)

ㄷ. $f'(x)=\frac{(2\ln x)f(x)}{x}=\frac{(2\ln x)\,x^{\ln x}}{x}$의 양변에 $\ln$을 잡고, 양변을 x에 대해 미분하면 다음과 같이 이계도함수 $f''(x)$를 구할 수 있다.

$$\ln f'(x)=\ln2+\ln(\ln x)+(\ln x)^2-\ln x$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{1}{\ln x}\times\frac{1}{x}+2(\ln x)\times\frac{1}{x}-\frac{1}{x}$$
$$=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln x}+2\ln x-1\right)$$
$$=\frac{2(\ln x)^2-\ln x+1}{x\ln x}$$

$$f''(x)=\frac{2(\ln x)^2-\ln x+1}{x\ln x}\times\frac{(2\ln x)\,x^{\ln x}}{x}$$
$$=\{2(\ln x)^2-\ln x+1\}\times\frac{2x^{\ln x}}{x^2}$$

여기서 $\ln x=t$로 두면

$$2(\ln x)^2-\ln x+1=2t^2-t+1$$

이 되고, 이 이차식의 판별식이

$$D=(-1)^2-4\times2\times1=-7<0$$

을 만족하므로

$$2t^2-t+1>0$$
$$2(\ln x)^2-\ln x+1>0$$

이 성립한다. 그리고 $x^{\ln x}>0$, $x^2>0$에 의해 $f''(x)>0$가 항상 성립하므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 존재하지 않는다. (거짓)

21 ④

부등식 $(x-n)(2^n-k)<0$은 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{cases}x-n>0\\2^n-k>0\end{cases}\ \text{또는}\ \begin{cases}x-n<0\\2^n-k<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x>n\\n>\log_2k\end{cases}\ \text{또는}\ \begin{cases}x<n\\n<\log_2k\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ n<x<\log_2k\ \text{또는}\ \log_2k<x<n$$
$$\cdots\cdots①\qquad\qquad\cdots\cdots②$$

①의 범위에 1개의 자연수만 포함된다면 $n+1$이 포함되어야 하므로

$$n+1<\log_2k\le n+2$$
$$2^{n+1}<k\le2^{n+2}\qquad\cdots\cdots③$$

이 성립해야 한다. 마찬가지로 ②의 범위에 1개의 자연수만

포함된다면 $n-1$이 포함되어야 하므로

$$n-2 \le \log_2 k < n-1$$

$$2^{n-2} \le k < 2^{n-1} \qquad \cdots\cdots ④$$

이 성립해야 한다.

i) $n=1$일 때

①에 1개의 자연수만 포함되려면 ③으로부터

$$4 < k \le 8 \Rightarrow k=5,\ 6,\ 7,\ 8$$

이고, ②에 1개의 자연수만 포함되려면 ④로부터

$$\frac{1}{2} \le k < 1 \Rightarrow \text{자연수 } k\text{값 없음}$$

이다. 따라서

$$a_1 = 4$$

ii) $n=2$일 때

①에 1개의 자연수만 포함되려면 ③으로부터

$$8 < k \le 16 \Rightarrow k=9,\ 10,\ 11,\ \cdots,\ 16$$

이고, ②에 1개의 자연수만 포함되려면 ④로부터

$$1 \le k < 2 \Rightarrow k=1$$

이다. 두 경우에서 k값이 겹치지 않으므로 ①, ②가 동시에 1개씩의 자연수를 갖는 경우는 없다. 따라서

$$a_2 = 8+1 = 9$$

iii) $n=3$일 때

①에 1개의 자연수만 포함되려면 ③으로부터

$$16 < k \le 32 \Rightarrow k=17,\ 18,\ 19,\ \cdots,\ 32$$

이고, ②에 1개의 자연수만 포함되려면 ④로부터

$$2 \le k < 4 \Rightarrow k=2,\ 3$$

이다. 여기서도 k값이 겹치지 않으므로 ①, ②가 동시에 1개씩의 자연수를 갖는 경우는 없다. 따라서

$$a_3 = 16+2 = 18$$

$\vdots$

i)~iii)의 결과를 살펴보면

a_n = (③에 포함되는 자연수 개수)
+ (④에 포함되는 자연수 개수)

로 이루어지고 ③에 포함되는 자연수들은

$n=1$일 때 $k=5,\ 6,\ 7,\ 8$

$n=2$일 때 $k=9,\ 10,\ 11,\ \cdots,\ 16$

$n=3$일 때 $k=17,\ 18,\ 19,\ \cdots,\ 32$

와 같이 서로 겹치지 않으면서 연속인 자연수가 나타난다. 마찬가지로 ④에 포함되는 자연수들도

$n=1$일 때 k값 없음

$n=2$일 때 $k=1$

$n=3$일 때 $k=2,\ 3$

과 같이 서로 겹치지 않으면서 연속인 자연수가 나타난다.

이 경향을 이용하기 위해 $n=6$일 때를 조사하면

①에 1개의 자연수만 포함되려면 ③으로부터

$$128 < k \le 256 \Rightarrow k\text{의 최댓값은 } 256$$

이고, ②에 1개의 자연수만 포함되려면 ④로부터

$$16 \le k < 32 \Rightarrow k\text{의 최댓값은 } 31$$

이다.

따라서 ③에 포함되는 자연수는 5부터 256까지 252개, ④에 포함되는 자연수는 1부터 31까지 31개다.

$$\sum_{n=1}^{6} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_6$$

= (③에 포함되는 자연수 개수의 합)
+ (④에 포함되는 자연수 개수의 합)

$$= 252 + 31 = 283$$

22 6

$$f'(x) = 5(x-1)^4 + \cos x$$

$$f'(0) = 5+1 = 6$$

23 11

$f(x) = e^{20x} - \int_0^x f'(t)\,dt$에 $x=0$을 대입하면

$$f(0) = 1-0 = 1$$

이고, $f(x) = e^{20x} - \int_0^x f'(t)\,dt$의 양변을 x에 대해 미분하면

$$f'(x) = 20e^{20x} - f'(x)$$

$$2f'(x) = 20e^{20x}$$

$$f'(x) = 10e^{20x}$$

$$f'(0) = 10$$

이다. 따라서

$$f(0) + f'(0) = 1+10 = 11$$

24 45

주어진 분수부등식의 좌변을 통분하고, 양변에 (분모)^{2}을 곱해서 풀면 다음과 같다.

$$\frac{-10}{x(x-10)} \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{x(x-10)} \le 0$$

$$x(x-10) \le 0,\ x \ne 0,\ x \ne 10$$

$$0 < x < 10$$

따라서 해에 포함된 정숫값들의 합은

$$1+2+3+\cdots+9 = 45$$

25 85

V_A의 값을 구하기 위해 주어진 관계식

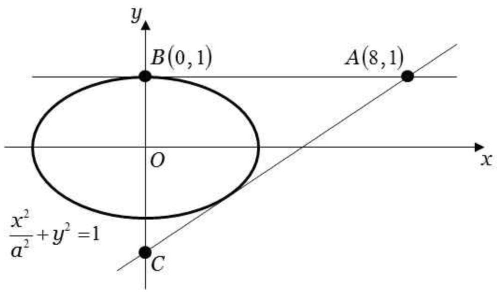
$$F = \log_2(11V+1) - \log_2(\sigma+4) + 2$$

에 $F=F_A=8$, $V=V_A$, $\sigma=\sigma_A=\dfrac{V_A}{8}$를 대입해서 풀면 다음과 같다.

$$8=\log_2(11V_A+1)-\log_2\left(\frac{V_A}{8}+4\right)+2$$
$$\log_2\left(\frac{V_A}{8}+4\right)+6=\log_2(11V_A+1)$$
$$\log_2(8V_A+256)=\log_2(11V_A+1)$$
$$8V_A+256=11V_A+1$$
$$\therefore V_A=85$$

26 32

타원 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$과 점 $A(8,1)$에서 이 타원에 그은 두 접선을 그리면 다음과 같다.



여기서 타원의 꼭짓점 가운데 하나가 점 $B(0,1)$이므로 접선 가운데 하나의 방정식은 $y=1$이다.

나머지 한 접선과 y축의 교점을 C라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=16 \Rightarrow \overline{BC}=4$$

이고, 점 C의 좌표는 $(0,\ -3)$이 된다. 따라서 접선 AC의 방정식은 다음과 같다.

$$y=\frac{1}{2}x-3 \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

또한 타원 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$의 접선 가운데 기울기가 $\frac{1}{2}$인 것은 타원의 접선 공식에 따라

$$y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+1}$$

이고, 이 중에서 $y=\frac{1}{2}x-\sqrt{\frac{1}{4}a^2+1}$이 ①과 일치하므로

$$-\sqrt{\frac{1}{4}a^2+1}=-3 \Rightarrow a^2=32$$

[다른 풀이] 타원 밖의 점에서 타원에 그은 접선을 구하는 일반적인 방법에 따라 루틴하게 풀 수도 있지만, 계산 과정이 복잡하고 a^2에 대한 방정식을 푸는 것이 어렵다.

점 $(8,1)$에서 타원 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+1} \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

이다. 여기에 점 $(8,1)$을 대입해서 만든 m에 대한 방정식을 풀면

$$1=8m\pm\sqrt{a^2m^2+1}$$
$$1-8m=\pm\sqrt{a^2m^2+1}$$
$$64m^2-16m+1=a^2m^2+1$$
$$(a^2-64)m^2+16m=0$$
$$m\{(a^2-64)m+16\}=0$$
$$m=0 \text{ 또는 } m=\frac{16}{64-a^2}$$

이고, 이를 ①에 대입하면

$$m=0\text{일 때 } y=1$$
$$m=\frac{16}{64-a^2}\text{일 때 } y=\frac{16}{64-a^2}x-\sqrt{a^2\left(\frac{16}{64-a^2}\right)^2+1}$$

두 개의 접선이 나타난다.

각 접선의 y절편이 1과 $-\sqrt{a^2\left(\frac{16}{64-a^2}\right)^2+1}$이므로 두 접선과 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\times\left(1+\sqrt{a^2\left(\frac{16}{64-a^2}\right)^2+1}\right)\times 8=16$$
$$\sqrt{a^2\left(\frac{16}{64-a^2}\right)^2+1}=3$$
$$a^2\left(\frac{16}{64-a^2}\right)^2=8$$
$$256a^2=8(64-a^2)^2$$
$$a^4-160a^2+4096=0$$
$$(a^2-32)(a^2-128)=0$$
$$a^2=32 \ (\because a<8)$$

27 14

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=f(n)-f(n+1)$의 꼴이므로 S_n을 구하려면 n에 1부터 $n-1$까지의 자연수를 대입해서 더한다.

$$a_1=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}$$
$$a_2=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}$$
$$\vdots$$
$$+\big)\ a_n=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$S_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

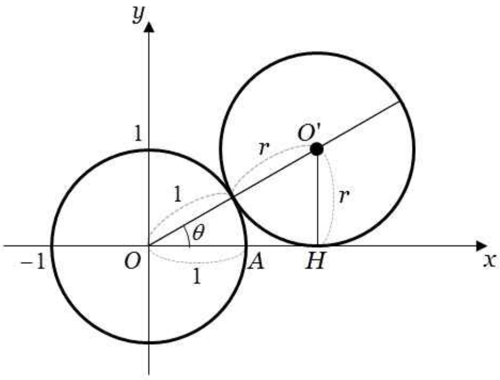
따라서

$$S_1\times S_2\times\cdots\times S_k$$

$$=\frac{1\times3}{2^2}\times\frac{2\times4}{3^2}\times\frac{3\times5}{4^2}\times$$
$$\cdots\times\frac{(k-1)\times(k+1)}{k^2}\times\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$$
$$=\frac{k+2}{2(k+1)}=\frac{8}{15}$$
$15k+30=16k+16$

$\therefore k=14$

28 50



점 O'을 중심으로 하는 원의 반지름이 r이라면

$$\sin\theta=\frac{r}{r+1}\ \Rightarrow\ r=\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}=\overline{O'H}$$

가 성립하고

$$\overline{OH}=\overline{OO'}\cos\theta=(1+r)\cos\theta$$

로부터

$$\overline{AH}=\overline{OH}-\overline{OA}$$
$$=(1+r)\cos\theta-1=\left(1+\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)\cos\theta-1$$
$$=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-1=\frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{1-\sin\theta}$$
$$\overline{O'H}-\overline{AH}=\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{1-\sin\theta}$$
$$=\frac{1-\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

가 성립한다.

따라서 주어진 극한은

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{O'H}-\overline{AH}}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{1-\cos\theta}{1-\sin\theta}\times\frac{1}{\theta^2}\right)$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{1-\cos\theta}{1-\sin\theta}\times\frac{1}{\theta^2}\times\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\left\{\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{1}{(1-\sin\theta)(1+\cos\theta)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}=a$$

$\therefore 100a=50$

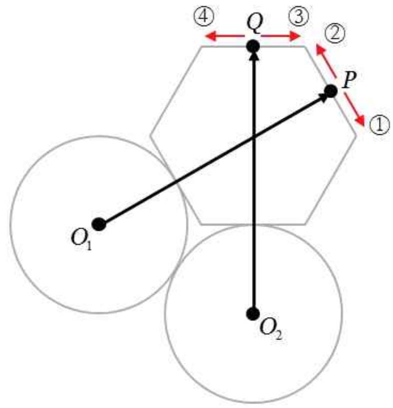
29 22

[첫 번째 풀이] 두 원과 정육각형의 접점이 정육각형의 변의 중점인 경우-벡터를 성분으로 나타내는 방법

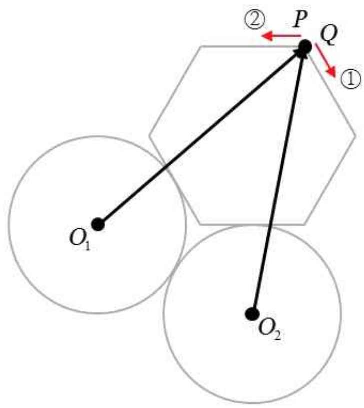
두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$가 이루는 각이 θ일 때, $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$는

$$\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}=\overline{O_1P}\times\overline{O_2Q}\times\cos\theta$$

로 정의된다.



또한 위 그림에서 점 P가 ①의 방향으로 이동할 때와 ②의 방향으로 이동할 때 선분 O_1P의 길이는 대칭적으로 변한다. 마찬가지로 점 Q가 ③의 방향으로 이동할 때와 ④의 방향으로 이동할 때 선분 O_2Q의 길이도 대칭적으로 변한다. 이때, 점 P가 ②의 방향으로, 점 Q가 ③의 방향으로 이동해야 선분 O_1P, O_2Q의 길이와 $\cos\theta$의 값이 커지면서 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$의 값이 증가한다.



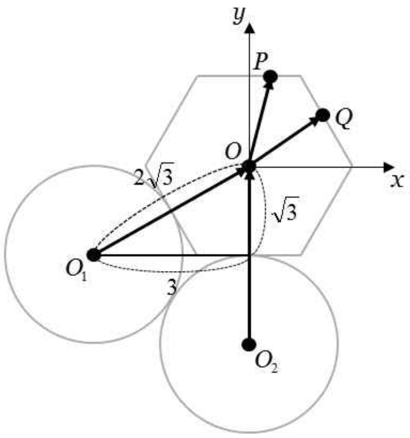
이제 두 점 P, Q가 위 그림과 같은 정육각형의 꼭짓점에 위치해 있다고 하자. 여기서 점 P가 ②의 방향으로, 점 Q가 ①의 방향으로 이동한다면 $\cos\theta$의 값은 커지지만 선분 O_1P, O_2Q의 길이가 작아지기 때문에 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$의 값이 증가하는지, 감소하는지 판단하기 어렵다.

이를 조사하기 위해 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$를 각각

$$\overrightarrow{O_1P}=\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_2O}+\overrightarrow{OQ}$$

로 분해해보자. (단, 점 O는 정육각형의 외접원의 중심) 그리

고 아래 그림과 같이 점 O를 원점으로 하면서 x축이 정육각형의 한 변과 평행한 좌표평면을 잡는다.



여기서 점 P는 직선 $y=\sqrt{3}$, 점 Q는 두 점 $(1,\ \sqrt{3})$, $(2,0)$을 지나는 직선 $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$ 위에 있으므로 각각의 좌표를 $P(p,\ \sqrt{3})$, $Q(q,\ -\sqrt{3}q+2\sqrt{3})$으로 둘 수 있다.

따라서

$$\overrightarrow{O_1P}=\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{OP}=(3,\ \sqrt{3})+(p,\ \sqrt{3})=(p+3,\ 2\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_2O}+\overrightarrow{OQ}=(0,\ 2\sqrt{3})+(q,\ -\sqrt{3}q+2\sqrt{3})=(q,\ -\sqrt{3}q+4\sqrt{3})$$

(단, $-1\le p\le 1,\ 1\le q\le 2$)

와 같이 나타낼 수 있으며, $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$는

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}&=(p+3,\ 2\sqrt{3})\cdot(q,\ -\sqrt{3}q+4\sqrt{3})\\&=(p+3)q+2\sqrt{3}(-\sqrt{3}q+4\sqrt{3})\\&=(p-3)q+24\end{aligned}$$

가 된다.

위 식에 포함된 p, q는 독립변수이고 각각 $-4\le p-3\le -2$, $1\le q\le 2$를 만족하므로 $(p-3)q<0$이다. 따라서 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$의 값이 최대이려면 $(p-3)q$의 절댓값이 최소가 되어야 하므로

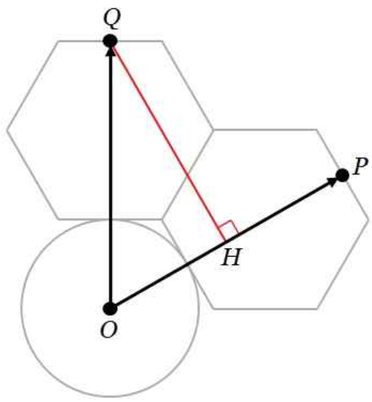
$p-3=-2$, $q=1$일 때

$\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값 22

가 나타난다.

[두 번째 풀이] 두 원과 정육각형의 접점이 정육각형의 변의 중점인 경우-벡터의 시점을 일치시키는 방법

점 O_1을 중심으로 하는 원을 평행이동해서 점 O_2를 중심으로 하는 원과 일치하도록 만든 다음, 두 원의 중심을 O라고 하자. 그리고 정육각형을 같은 양만큼 평행이동하면 다음과 같은 그림이 나타난다.

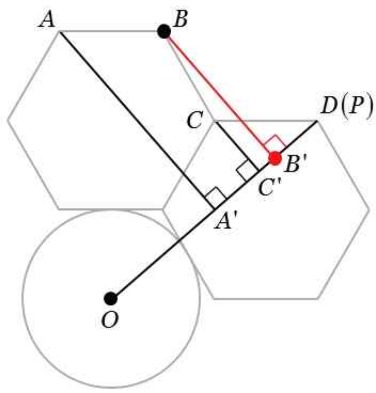


이때,

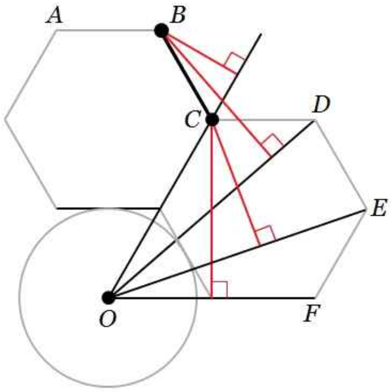
$$\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$$

가 성립하고, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 값은 선분 OQ의 직선 OP 위로의 정사영인 선분 OH의 길이와 선분 OP의 길이를 곱한 것이다. 이를 이용해서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 최댓값이 언제 나타나는지 조사해보자.

먼저 점 P가 아래 그림의 점 D에 위치한다고 가정하자. 그리고 점 Q가 존재할 수 있는 점 A, B, C에서 직선 OP에 내린 수선의 발을 각각 A', B', C'이라 하면 세 선분 OA, OB, OC의 직선 OP로의 정사영 가운데 가장 긴 것은 선분 OB'이다. 따라서 점 P가 점 D에 위치하면 점 Q가 점 B에 위치해야 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 값이 최대다.



같은 방법으로 점 P의 위치를 점 C, D, E, F로 옮겨가면서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 값이 최대인 때를 조사해보자.

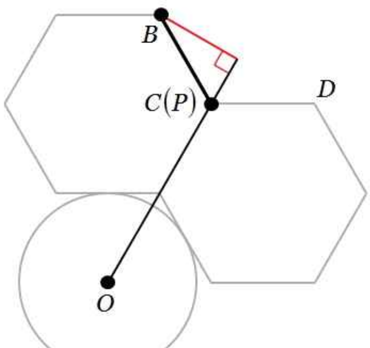


- 점 P가 점 C에 위치하면 점 Q가 점 B에 위치해야 선분 OQ의 직선 OP로의 정사영 길이가 최대다.
- 점 P가 점 D에 위치하면 점 Q가 점 B에 위치해야 선분 OQ의 직선 OP로의 정사영 길이가 최대다.
- 점 P가 점 E에 위치하면 점 Q가 점 C에 위치해야 선분 OQ의 직선 OP로의 정사영 길이가 최대다.
- 점 P가 점 F에 위치하면 점 Q가 점 C에 위치해야 선분 OQ의 직선 OP로의 정사영 길이가 최대다.

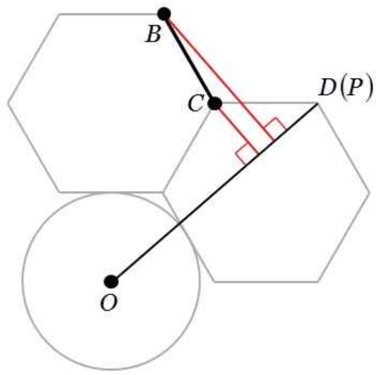
따라서 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$의 값이 최대이려면 점 Q는 선분 BC 위에 있어야 함을 알 수 있다. 같은 이유로 점 P는 선분 CD 위에 있어야 한다.

이제 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$의 값이 최대이기 위해서는 두 점 P, Q가 각각 선분 CD와 BC의 어느 지점에 위치해야 하는지 알아보자.

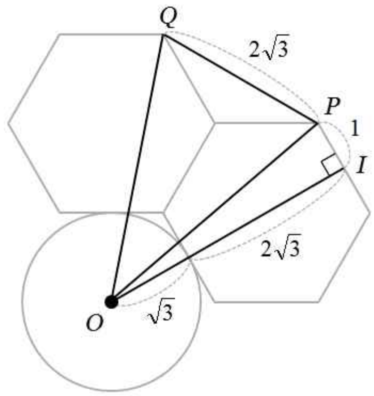
먼저 점 P가 점 C에 위치할 때, 선분 OQ의 선분 OP로의 정사영 길이가 최대이려면 점 Q는 점 B에 위치해야 한다.



마찬가지로 점 P가 점 D에 위치할 때, 선분 OQ의 선분 OP로의 정사영 길이가 최대이려면 점 Q는 점 B에 위치해야 한다.



그러므로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$의 값이 최대이려면 점 Q는 점 B에 위치해야 하고, 같은 이유로 점 P는 점 D에 위치해야 한다. 그러면 다음과 같은 그림을 얻을 수 있으며, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$의 최댓값도 구할 수 있다.



$$\overline{OI} = 3\sqrt{3},\ \overline{PI} = 1,\ \overline{PQ} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{OP} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2\sqrt{7} = \overline{OQ}$$

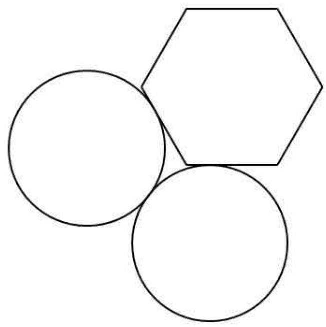
$$\cos(\angle POQ) = \frac{(2\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times 2\sqrt{7} \times 2\sqrt{7}} = \frac{11}{14}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \overline{OP} \times \overline{OQ} \times \cos(\angle POQ)$$

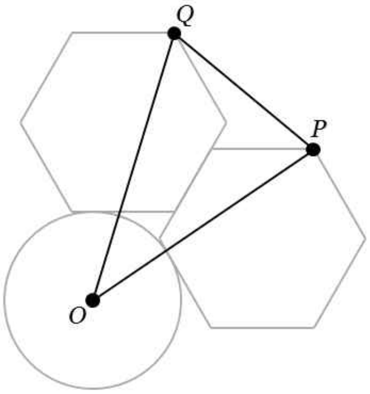
$$= 2\sqrt{7} \times 2\sqrt{7} \times \frac{11}{14} = 22$$

[세 번째 풀이] 두 원과 정육각형의 접점이 정육각형의 변의 중점이 아닐 수도 있는 경우–벡터의 시점을 일치시키는 방법

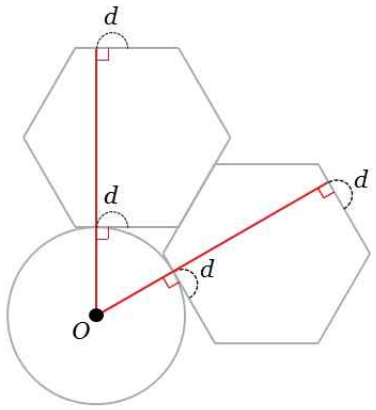
문제에 주어진 조건에 따라 다음과 같이 원과 정육각형의 접점이 변의 중점이 아닌 경우도 생각할 수 있다.



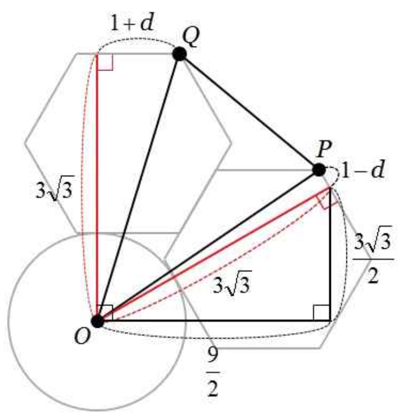
점 O_1을 중심으로 하는 원을 평행이동해서 점 O_2를 중심으로 하는 원과 일치하도록 만든 다음, 두 원의 중심을 O라고 하자. 이때, $\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2Q} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$의 값이 최대이려면 원과 정육각형의 접점이 정육각형의 변의 중점일 때와 마찬가지로 두 점 P, Q의 위치가 아래 그림과 같아야 한다.

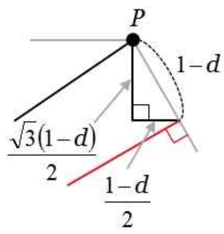


다음으로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$의 값을 계산하기 위해 정육각형의 변의 중점에서 원과 정육각형의 접점까지의 거리를 d라 하자. (단, $0 \le d \le 1$)



그리고 두 벡터 OP, OQ를 성분으로 나타내기 위해 아래 그림과 같은 직각삼각형들을 그리고, 각 변의 길이를 d에 대한 식으로 나타낸다.





이때, 두 벡터 OP, OQ와 두 벡터의 내적은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

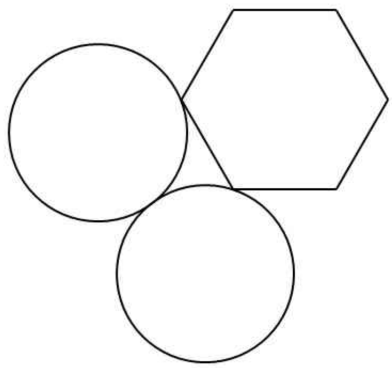
$$\overrightarrow{OP} = \left(\frac{9}{2} - \frac{1-d}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}(1-d)}{2}\right) = \left(\frac{8+d}{2},\ \frac{\sqrt{3}(4-d)}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OQ} = (1+d,\ 3\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{(8+d)(1+d)}{2} + \frac{9(4-d)}{2} = \frac{d^2+44}{2}$$

그러므로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$의 최댓값은 $d=1$일 때, $\frac{45}{2}$이다.

☆ 두 번째 풀이에서도 다음과 같이 원과 정육각형이 정육각형의 꼭짓점에서 내접하는 경우는 고려하지 않았다.



30 83

조건 (가)에 의해 $f(x)-g(x)$는 x, $x-3$을 인수로 갖는다. 또한 $f(x)$와 $g(x)$의 사차항 계수가 일치하므로 $f(x)-g(x)$는 삼차 이하, 이차 이상의 식이다.

만일 $f(x)-g(x)$가 삼차식이라면

$$f(x)-g(x) = x(x-3)(ax+b)$$

로 둘 수 있고, 두 곡선 $f(x)$, $g(x)$가 $x=0$, 3일 때만 만나므로 방정식 $ax+b=0$의 해도 0 또는 3이어야 한다. 따라서

i) $f(x)-g(x) = ax^2(x-3)$

ii) $f(x)-g(x) = ax(x-3)^2$

두 가지 경우가 가능하다.

만일 $f(x)-g(x)$가 이차식이라면

$iii)\ f(x)-g(x)=ax(x-3)$

한 가지 경우만 가능하다.

다음으로 조건 ㈏를 부분적분에 따라 변형하면 다음과 같다.

$$\int_0^4 xf'(x)\,dx=\left[xf(x)\right]_0^4-\int_0^4 f(x)\,dx=1$$

$$\Rightarrow \int_0^4 f(x)\,dx=4f(4)-1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\int_0^4 xg'(x)\,dx=\left[xg(x)\right]_0^4-\int_0^4 g(x)\,dx=-1$$

$$\Rightarrow \int_0^4 g(x)\,dx=4g(4)+1 \qquad \cdots\cdots ②$$

①-②에 의해

$$\int_0^4 \{f(x)-g(x)\}\,dx=4\{f(4)-g(4)\}-2 \qquad \cdots\cdots ③$$

$i)\ f(x)-g(x)=ax^2(x-3)$일 때

③에 대입하면

$$\int_0^4 ax^2(x-3)\,dx=4\times 16a-2$$

$$0=64a-2$$

$$a=\frac{1}{32}$$

이다. 그런데

$$f(4)-g(4)=16a=\frac{1}{2}$$

이므로 조건 ㈐를 만족하지 못한다.

$ii)\ f(x)-g(x)=ax(x-3)^2$일 때

③에 대입하면

$$\int_0^4 ax(x-3)^2\,dx=4\times 4a-2$$

$$8a=16a-2$$

$$a=\frac{1}{4}$$

이다. 그런데

$$f(4)-g(4)=4a=1$$

이므로 조건 ㈐를 만족하지 못한다.

$iii)\ f(x)-g(x)=ax(x-3)$일 때

③에 대입하면

$$\int_0^4 ax(x-3)\,dx=4\times 4a-2$$

$$-\frac{8a}{3}=16a-2$$

$$a=\frac{3}{28}$$

이다. 또한

$$f(4)-g(4)=4a=\frac{3}{7}$$

이므로 조건 ㈐도 만족한다.

그러므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음과 같이 계산된다.

$$\left|\int_0^3 \{f(x)-g(x)\}\,dx\right|=\int_0^3 \frac{3}{28}x(x-3)\,dx$$

$$=\frac{3}{28}\times\frac{1}{6}\times(3-0)^3=\frac{27}{56}$$

$$\therefore p+q=83$$