제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. $1+2i+i(1-i)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [2점]

① $-2+3i$ ② $-1+3i$ ③ $-1+4i$ ④ $2+3i$ ⑤ $2+4i$

2. 두 다항식 $A=4x^2+2x-1$, $B=x^2+x-3$에 대하여 $A-2B$를 간단히 하면? [2점]

① x^2+2 ② x^2+5 ③ $2x^2+5$
④ x^2-x+4 ⑤ $2x^2-x+4$

3. 다항식 x^3+x^2+x+1을 $2x-1$로 나눈 나머지는? [2점]

① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{13}{8}$ ④ $\frac{15}{8}$ ⑤ $\frac{17}{8}$

$x=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{15}{8}$

4. x에 대한 이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $-4<x<3$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

$(x+4)(x-3)<0$

$x^2+x-12<0$

$a=1, b=-12$

$a-b=13$

5. 부등식 $|x-2|<5$를 만족시키는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$-5 < x-2 < 5$

$-3 < x < 7$

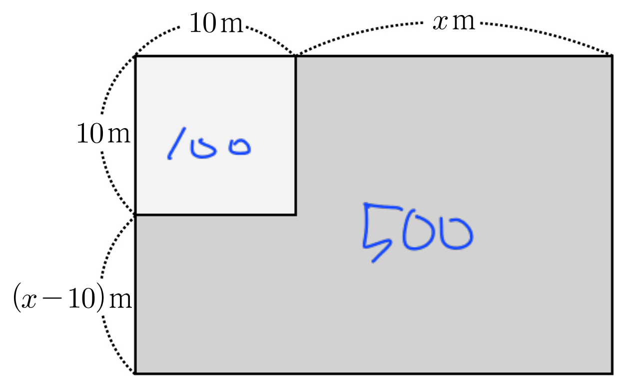
6. $101^3-3\times101^2+3\times101-1$의 값은? [3점]

① 10^5 ② 3×10^5 ③ 10^6 ④ 3×10^6 ⑤ 10^7

$101 = x$

$x^3-3x^2+3x-1 = (x-1)^3 = 100^3 = 10^6$

7. 어느 가족이 작년까지 한 변의 길이가 10m인 정사각형 모양의 밭을 가꾸었다. 올해는 그림과 같이 가로의 길이를 xm만큼, 세로의 길이를 $(x-10)$m만큼 늘여서 새로운 직사각형 모양의 밭을 가꾸었다. 올해 늘어난 ⌐ 모양의 밭의 넓이가 500m^2일 때, x의 값은? (단, $x>10$) [3점]



① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

$(x+10)x = 600 = 30\times20$

$x=20$

8. 다항식 $Q(x)$에 대하여 등식

$$x^3-5x^2+ax+1=(x-1)Q(x)-1$$

이 x에 대한 항등식일 때, $Q(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

$x=1 \Rightarrow 1-5+a+1=-1,\ a=2$

$x=2 \Rightarrow 8-20+4+1=Q(2)-1$

$Q(2)=-6$

9. $x=2+i$, $y=2-i$일 때, $x^4+x^2y^2+y^4$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$x+y=4$

$xy=5$

$x^2+y^2=6$

$(x^2+y^2)^2-x^2y^2$

$=6^2-5^2=11$

10. 이차함수 $y=x^2+2(a-1)x+2a+13$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$D/4=(a-1)^2-(2a+13)<0$

$a^2-4a-12<0$

$-2<a<6$

$-1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5$

14

11. x에 대한 이차방정식 $x^2+k(2p-3)x-(p^2-2)k+q+2=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 1을 근으로 가질 때, 두 상수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은? [3점]

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

$x=1 \to 1+2kp-3k-p^2k+2k+q+2=0$

$\underbrace{k(-p^2+2p-1)}_{0}+\underbrace{q+3}_{0}=0$

$p^2-2p+1=0$, $q=-3$

$(p-1)^2=0$

$p=1$

12. 연립방정식

$$\begin{cases} x+y+xy=8 \\ 2x+2y-xy=4 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$

$a+b=8$

$+\ (2a-b=4$

$3a=12$

$\begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases}$

$x+y=4=\alpha+\beta$

$xy=4=\alpha\beta$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16-8=8$

13. 삼차방정식

$$x^3+2x^2-3x-10=0$$

의 서로 다른 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값은? [3점]

① -2 ② -3 ③ -4 ④ -5 ⑤ -6

$x=2 \to 0$

$(x-2)(\underline{x^2+4x+5})=0$

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=5$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=-64+60=-4$

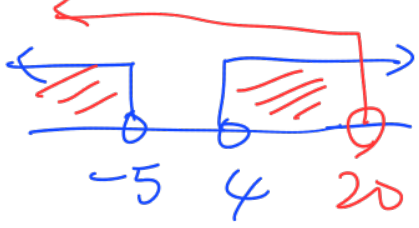
14. x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx-k+20=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가질 때, $\alpha\beta>0$을 만족시키는 모든 자연수 k의 개수는? [4점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

$D/4=k^2+k-20>0$

$k<-5$, $k>4$

$\alpha\beta=-k+20>0$, $k<20$



$4<k<20$ $\underline{15개}$

15. 이차다항식 $P(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $P(-1)$의 값은? [4점]

(가) 부등식 $P(x) \geq -2x-3$의 해는 $0 \leq x \leq 1$이다.
(나) 방정식 $P(x) = -3x-2$는 중근을 가진다.

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

$P(x)+2x+3 = ax(x-1)$

$P(x)+3x+2 = ax(x-1)+x-1$

$= ax^2+(1-a)x-1$ 중근

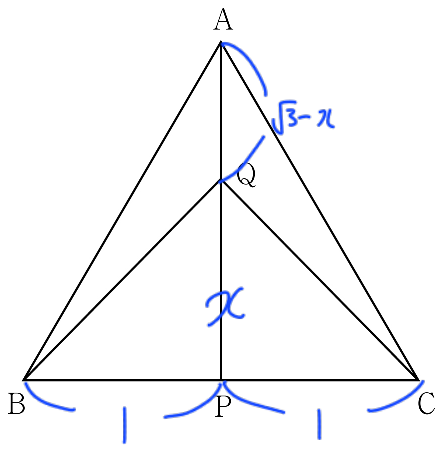
$D = (1-a)^2+4a = 0$

$a^2+2a+1 = 0$, $a=-1$

$P(x) = -x(x-1)-2x-3$

$P(-1) = -2+2-3 = -3$

16. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에 대하여 변 BC의 중점을 P라 하고, 선분 AP 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이를 x라 하자. $\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2+\overline{CQ}^2$은 $x=a$에서 최솟값 m을 가진다. $\frac{m}{a}$의 값은? (단, $0<x<\sqrt{3}$이고, a는 실수이다.) [4점]



$AP = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$

① $3\sqrt{3}$ ② $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

$BQ^2 = CQ^2 = x^2+1$

$AQ^2+BQ^2+CQ^2 = (\sqrt{3}-x)^2+2(x^2+1)$

$= 3x^2-2\sqrt{3}x+5$

$= 3\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+4$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ 최솟값 4

$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $m=4$, $\frac{m}{a} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

17. x에 대한 다항식 x^3+x^2+ax+b가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 두 상수 a, b에 대하여 $Q(ab)$의 값은? [4점]

① -15　② -14　③ -13　④ -12　⑤ -11

세근 합 $-1 \Rightarrow 1, 1, -3$

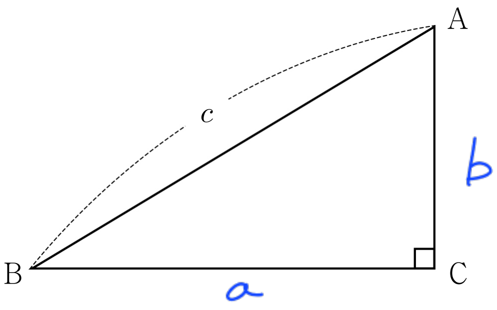
$x^3+x^2+ax+b=(x-1)^2(x+3)$

$=x^3+x^2-5x+3$

$a=-5, b=3$　$ab=-15$

$Q(x)=x+3$, $Q(ab)=Q(-15)=-12$

18. 그림과 같이 빗변의 길이가 c이고 둘레의 길이가 10인 직각삼각형 ABC가 있다.



다음은 직각삼각형 ABC의 빗변의 길이 c의 범위를 구하는 과정이다.

> $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하면
> 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 10이고 $\overline{AB}=c$이므로
> $a+b=$ (가) …… ㉠ $10-c$
> 이다. 삼각형 ABC가 직각삼각형이므로
> $a^2+b^2=c^2$에서 $(a+b)^2-2ab=c^2$ …… ㉡ $(10-c)^2-2ab=c^2$
> 이다. ㉠을 ㉡에 대입하면 $ab=$ (나) 이다. $100-20c=2ab$, $ab=50-10c$
> $50-10c$
> a, b를 두 실근으로 가지고 이차항의 계수가 1인 x에 대한 이차방정식은
> $10-c$　$50-10c$
> $x^2-($ (가) $)x+$ (나) $=0$ …… ㉢
> 이고 ㉢의 판별식 $D\geq 0$이다. $(10-c)^2-4(50-10c)\geq 0$
> 빗변의 길이 c는 양수이므로　$c^2+20c-100\geq 0$, $-10\pm\sqrt{200}$
> 부등식 $D\geq 0$의 해를 구하면 $c\geq$ (다) 이다. $=-10\pm10\sqrt{2}$
> ㉢의 두 실근 a, b는 모두 양수이므로 $-10+10\sqrt{2}$　$c\leq -10-10\sqrt{2}$, $c\geq -10+10\sqrt{2}$
> 두 근의 합 (가) 와 곱 (나) 는 모두 양수이다. $c>0$ 이므로
> 따라서 빗변의 길이 c의 범위는 (다) $\leq c<5$이다. $c\geq -10+10\sqrt{2}$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(c)$, $g(c)$라 하고 (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $\frac{k}{25}\times f\left(\frac{9}{2}\right)\times g\left(\frac{9}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $10(\sqrt{2}-1)$　② $11(\sqrt{2}-1)$　③ $12(\sqrt{2}-1)$
④ $10(\sqrt{2}+1)$　⑤ $11(\sqrt{2}+1)$

$\frac{-10(1-\sqrt{2})}{25}\times\left(10-\frac{9}{2}\right)\times(50-45)$

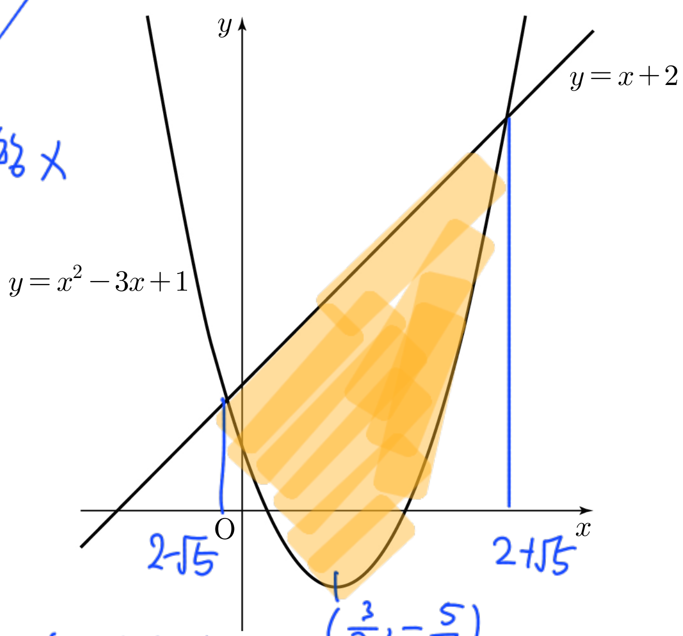
$=-\frac{2}{5}(1-\sqrt{2})\times\frac{11}{2}\times5$

$=11(\sqrt{2}-1)$

19. 이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=x+2$로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

경계포함 X



$x^2-3x+1=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

$x^2-3x+1=x+2$

$x^2-4x-1=0$

$x=2\pm\sqrt{5}$ $\begin{cases} 2-\sqrt{5}=-0.xxx \\ 2+\sqrt{5}=4.xxx \end{cases}$ $0\le x\le 4$

x	0	1	2	3	4
$x+2$	2	3	4	5	6
	V	V	V	V	V
x^2-3x+1	1	-1	-1	1	5
	↓	↓	↓	↓	↓
	0	3	4	3	0

$3+4+3=10$

20. 모든 실수 x에 대하여 다항식 $P(x)$가

$$\{P(x)+2\}^2=(x-a)(x-2a)+4$$

를 만족시킬 때, 모든 $P(1)$의 값의 합은? (단, a는 실수이다.) [4점]

① -9 ② -8 ③ -7 ④ -6 ⑤ -5

$x^2-3ax+2a^2+4=\boxed{}^2$ 완전제곱

$D/4=9a^2-8a^2-16=0$

$a^2=16,\ a=\pm4$

$x^2\pm12x+36=(x\pm6)^2=(P(x)+2)^2$

$x=1\to(P(1)+2)^2=(1\pm6)^2=49$ or 25

$P(1)+2=\pm7$ or ±5

$P(1)+2\Rightarrow 7, -7, 5, -5$

$P(1)\Rightarrow 5, -9, 3, -7$

-8

21. $1 \le x \le 2$에서 이차함수 $f(x)=(x-a)^2+b$의 최솟값이 5일 때, 두 실수 a, b에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

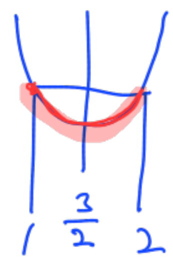
ㄱ. $a=\frac{3}{2}$일 때, $b=5$이다.

ㄴ. $a \le 1$일 때, $b=-a^2+2a+4$이다.

ㄷ. $a+b$의 최댓값은 $\frac{29}{4}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ.



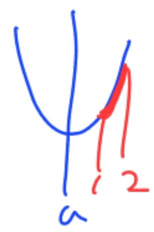
최솟값 $b=5$

ㄴ.

최솟값 $f(1)=(1-a)^2+b=5$

$b=-a^2+2a+4$

ㄷ.



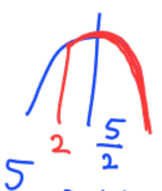
$a \ge 2$

최솟값 $f(2)=(2-a)^2+b=5$,

$b=-a^2+4a+1$

$a+b=-a^2+5a+1$

$=-(a-\frac{5}{2})^2+\frac{29}{4}$



$a=\frac{5}{2} \Rightarrow$ 최댓값 $\frac{29}{4}$

$1<a<2$

$b=5$

$6<a+b<7$

$a \le 1$

$f(1)=(1-a)^2+b=5$

$b=-a^2+2a+4$

$a+b=-a^2+3a+4$

$=-(a-\frac{3}{2})^2+\frac{25}{4}$

최댓값 $a=1 \rightarrow 6$

$\therefore$ 최댓값 : $\frac{29}{4}$

단답형

22. 다항식 $(x+2y)^3$을 전개한 식에서 xy^2의 계수를 구하시오. [3점]

$\boxed{12}$

$3x(2y)^2=12xy^2$

23. $(3+ai)(2-i)=13+bi$를 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [3점]

$\boxed{18}$

$6+a+(2a-3)i=13+bi$

$\begin{cases} 6+a=13, & a=7 \\ 2a-3=b, & b=11 \end{cases}$

24. 연립방정식

$$\begin{cases} x-y=-5 \\ 4x^2+y^2=20 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{3}$

$y=x+5$

$4x^2+(x+5)^2=20$

$5x^2+10x+5=0$

$(x+1)^2=0$

$x=-1=\alpha$

$y=4=\beta$

25. x에 대한 이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\dfrac{1}{\alpha^2-\alpha+k}+\dfrac{1}{\beta^2-\beta+k}=\dfrac{1}{4}$을 만족시키는 실수 k의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{6}$

$\begin{cases}\alpha+\beta=3 \\ \alpha\beta=k\end{cases}$

$\alpha^2-3\alpha+k=0 \Rightarrow \alpha^2+k=3\alpha$

$\beta^2-3\beta+k=0 \Rightarrow \beta^2+k=3\beta$

$\dfrac{1}{\alpha^2+k-\alpha}+\dfrac{1}{\beta^2+k-\beta}=\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{2\alpha}+\dfrac{1}{2\beta}=\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\dfrac{3}{2k}=\dfrac{1}{4}$, $2k=12$, $k=6$

26. x에 대한 사차방정식 $x^4-(2a-9)x^2+4=0$이 서로 다른 네 실근 α, β, γ, δ $(\alpha<\beta<\gamma<\delta)$를 가진다. $\alpha^2+\beta^2=5$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{7}$

$x^2=t \ (t>0)$

$t^2-(2a-9)t+4=0$

근 p^2, q^2 $(p^2<q^2)$, $p^2+q^2=2a-9$

$x^2=p^2, q^2$

$x=\pm p, \pm q$

$\underset{\alpha}{-q}<\underset{\beta}{-p}<p<q$

$\alpha^2+\beta^2=p^2+q^2=2a-9=5$, $a=7$

27. 100 이하의 자연수 n에 대하여

$$(1-i)^{2n}=2^n i$$

를 만족시키는 모든 n의 개수를 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.) [4점]

$\boxed{25}$

$\left((1-i)^2\right)^n=(-2i)^n=(-2)^n i^n=(-1)^n 2^n i^n$

$(-1)^n\cdot 2^n\cdot i^n=2^n i$

$(-1)^n\cdot i^{n-1}=1$

$n=4k+1 \Rightarrow -1$
$n=4k+2 \Rightarrow i$
$n=4k+3 \Rightarrow 1$
$n=4k+4 \Rightarrow -i$

4개 반복
$100\div 4=25$

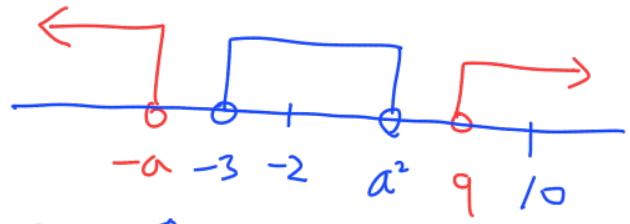
28. x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2-(a^2-3)x-3a^2<0 \\ x^2+(a-9)x-9a>0 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x가 존재하지 않기 위한 실수 a의 최댓값을 M이라 하자. M^2의 값을 구하시오. (단, $a>2$) [4점]

$\boxed{10}$

$(x-a^2)(x+3)<0 \Rightarrow -3<x<a^2$
$(x-9)(x+a)>0 \Rightarrow x<-a$ or $x>9$



$a>2$
$-a<-2$) 정수 존재 X

$a^2\le 10$

$M^2=10$

29. 삼차다항식 $P(x)$와 일차다항식 $Q(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $P(x)Q(x)$는 $(x^2-3x+3)(x-1)$로 나누어떨어진다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $x^3-10x+13-P(x)=\{Q(x)\}^2$이다.

$Q(0)<0$일 때, $P(2)+Q(8)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{13}$

$P(x)$: 3차, $Q(x)$: 1차

(나) $\{Q(x)\}^2$: 2차 $\Rightarrow x^3-10x+13-P(x)$

2차식, $P(x)=x^3+kx^2\sim$ $(k\neq 0)$

최고차항 계수 : 1

$P(x)Q(x)=(x^2-3x+3)(x-1)(ax+b)$

$D<0$ 이고, $Q(0)<0 \Rightarrow Q(x)=x-1$ or $ax+b$

i) $P(x)=(x^2-3x+3)(x-1)$

$Q(x)=ax+b$

$P(x)=x^3-4x^2+6x-3$

$x^3-10x+13-P(x)=4x^2-16x+16$

$4(x^2-4x+4)=(Q(x))^2$

$(2(x-2))^2=(Q(x))^2$

$Q(x)=2(x-2)$ $(\because Q(0)<0)$

$P(2)=8-16+12-3=1$

$Q(8)=12$

$12+1=13$

ii) $P(x)=(x^2-3x+3)(ax+b)$

$Q(x)=x-1$

$P(x)$ 최고차항 계수 $1 \Rightarrow a=1$

$P(x)=x^3+(b-3)x^2+(3-3b)x+3b$

$x^3-10x+13-P(x)$

$=(3-b)x^2+(3b-13)x+13-3b$

$=(Q(x))^2=x^2-2x+1$

$3-b=1 \rightarrow b=2$

$3b-13=-2 \rightarrow b=\frac{11}{3}$

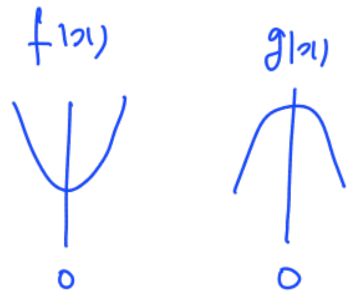
(X)

30. 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(0)$, $g(x)\leq g(0)$이다.
> (나) $f(0)$은 정수이고, $g(0)-f(0)=4$이다.

x에 대한 방정식 $f(x)+p=k$의 서로 다른 실근의 개수와 x에 대한 방정식 $g(x)-p=k$의 서로 다른 실근의 개수가 같게 되도록 하는 정수 k의 개수가 1일 때, 실수 p의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 하자. $m+10M$의 값을 구하시오. [4점]

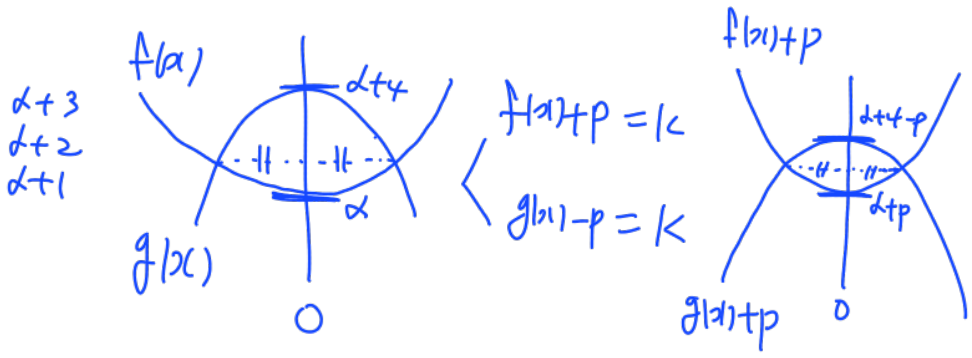
$\boxed{31}$



$g(0)-f(0)=4$

$g(0)=\alpha+4$

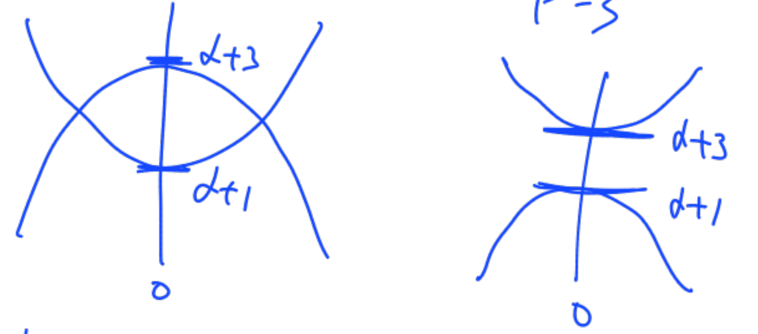
$f(0)=\alpha$ (α:정수)



$p\leq 0 \Rightarrow$ 정수 k는 2개 이상 존재

$p>0$, 최소 $p=1$ 최대 $p=3$

α : 정수



$k=\alpha+2$ 유일

$k=\alpha+2$ 유일

$m=1$, $M=3$

$m+10M=31$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.