8. 좌표평면에서 포물선 $y^2=8x$에 접하는 두 직선 l_1, l_2의 기울기가 각각 m_1, m_2이다. m_1, m_2가 방정식 $2x^2-3x+1=0$의 서로 다른 두 근일 때, l_1과 l_2의 교점의 x좌표는? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$sol1)$

주어진 방정식의 실근 m_1과 m_2를 직접 구하면 1과 $\frac{1}{2}$입니다.

기울기를 알 때의 접선의 방정식 공식을 이용하면 두 직선은

$$l_1 : y = x+2 \qquad l_2 : y = \frac{1}{2}x+4$$

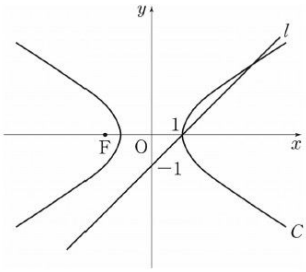
입니다. 구하는 것은 교점의 x좌표이니 y를 소거하면 정답인 $x=4$를 얻습니다.

$sol2)$

교점의 좌표를 (a,b)라고 하면, 기울기가 m인 (a,b)를 지나는 $y^2=8x$의 접선의 방정식은 $b=ma+\frac{2}{m}$, $am^2-bm+2=0$입니다. 이 m에 대한 방정식의 실근은 m_1, m_2이고 문제에서 주어진 이차방정식과 접선의 방정식에서 얻은 방정식에 각각 근과 계수 사이의 관계를 적용하면 $m_1 \times m_2 = \frac{1}{2} = \frac{2}{a}$이므로

$\therefore a=4$

[13~14] 그림과 같이 직선 $l: x-y-1=0$과 한 초점이 점 $\mathrm{F}(c, 0)$ (단, $c<0$)인 쌍곡선 $C: x^2-2y^2=1$이 있다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



14. 원점을 중심으로 θ만큼 회전하는 회전변환에 의하여 직선 l은 쌍곡선 C의 초점 F를 지나는 직선으로 옮겨진다. $\sin 2\theta$의 값은? [4점]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{5}{9}$ ③ $-\frac{4}{9}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{2}{9}$

$sol1)$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$라고 하면 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$입니다.

$x=\cos\theta x'+\sin\theta y', y=-\sin\theta x'+\cos\theta y'$를 l의 방정식에 대입하면

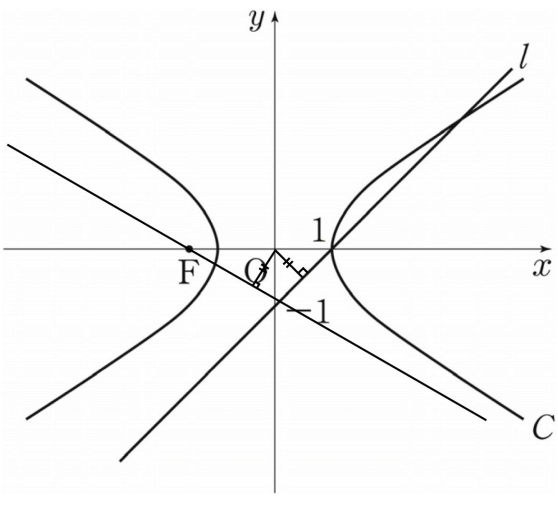
$(\cos\theta+\sin\theta)x'+(\sin\theta-\cos\theta)y'-1=0$이고, 이 직선은 $F\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$을 지납니다.

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{\frac{2}{3}}$이고 양 변을 제곱하면 $1+\sin 2\theta=\frac{2}{3}$이므로

$\therefore \sin 2\theta=-\frac{1}{3}$

$sol2)$

두 직선이 이루는 각의 크기는 각각의 법선이 이루는 각의 크기와 일치합니다.
원점에서 두 직선에 내린 수선이 이루는 각의 크기로 회전각을 대신 알아보겠습니다.



변환 후의 직선을 l'이라고 하고 O에서 l과 l'에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라고 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OH}'}=\frac{1}{\sqrt{2}}$입니다.

$\overline{OF}=\sqrt{\frac{3}{2}}$이므로 $\angle \mathrm{FOH}'=\alpha$라 하면

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}, \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이고,

회전각은 OH에서 OH$'$까지 반시계방향으로 잰 각이므로 $\theta=\pi+\frac{\pi}{4}+\alpha$입니다.

삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$\sin\theta=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}, \cos\theta=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$, $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{3}$입니다.

21. 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)\,dt$$

이다. $f(1)=1$일 때,

$$\pi^2\int_0^1 xf(x+1)\,dx$$

의 값은? [4점]

① $2(\pi-2)$ ② $2\pi-3$ ③ $2(\pi-1)$
④ $2\pi-1$ ⑤ 2π

*sol*1)

문제의 조건에서 $f(-x)=-f(x)$이고 $f(1)=1$이므로 $f(-1)=-1$이고

주어진 관계식의 양 변을 미분하면 $f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$입니다.

$$\pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx=\pi^2\int_0^1 x\times\frac{2}{\pi}f'(x)dx=2\pi\int_0^1 xf'(x)dx$$

$$=2\pi\left\{[xf(x)]_0^1-\int_0^1 f(x)dx\right\}=2\pi\left\{f(1)-\int_0^1 f(x)dx\right\}$$

여기에서 $\int_0^1 f(x)dx=-\int_1^0 f(x)dx=-f(-1)\times\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$이므로

$$\therefore \pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx=2(\pi-2)$$

*sol*2)

$f(-x)=-f(x),\ f(1)=1,\ f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$..

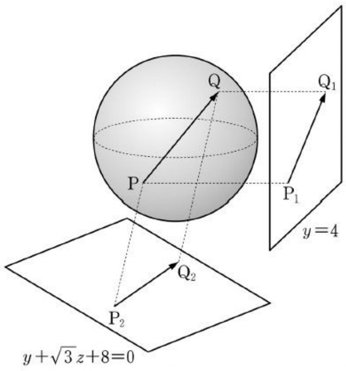
조건을 잘 살펴보면 위의 모든 조건을 만족하는 함수로 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$를 생각할 수 있습니다.

이 함수를 이용해 문제의 정적분을 계산하면

$$\pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx=\pi^2\int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)dx=\pi^2\int_0^1 x\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$=\pi^2\left[x\times\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1-2\pi\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}x\,dx=2\pi-4\int_0^1\sin t\,dt=2(\pi-2)$$

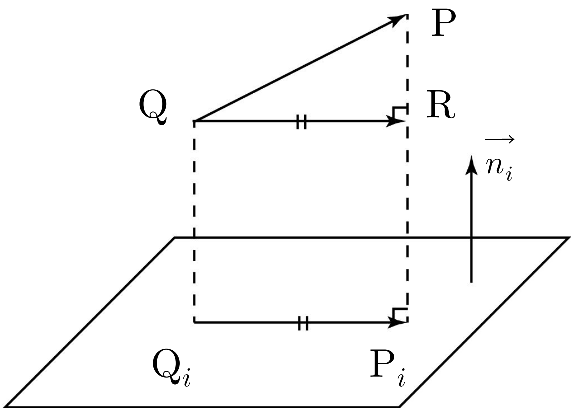
29. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$라 하자. $2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



*sol*1)

$2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$ 입니다.

주어진 두 평면을 각각 $\alpha_i(i=1,2)$라고 하고 그 법선벡터 중 하나를 $\overrightarrow{n_i}$로 두면



왼쪽의 그림으로부터

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P}_i\mathrm{Q}i}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{n_i}}{|\overrightarrow{n_i}|}\right|^2$$

입니다. $\overrightarrow{n_1}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{n_2}=(0,1,\sqrt{3})$으로 두고 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(a,b,c)$라고 하면 주어진 식은 아래와 같이 쓸 수 있습니다.

$$\sum_{i=1}^{2}\left\{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{P_iQ_i}|^2\right\}=\left|\frac{b}{1}\right|^2+\left|\frac{b+\sqrt{3}c}{2}\right|^2$$

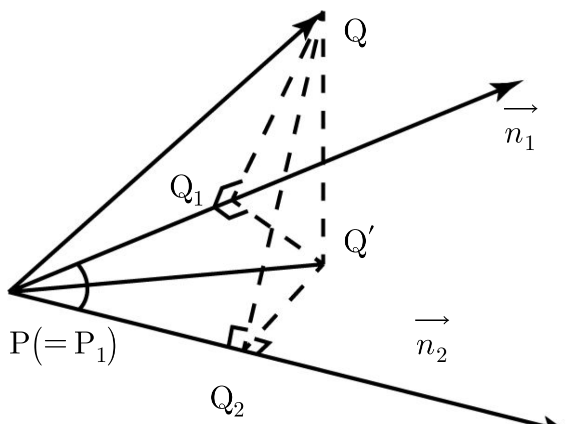
$$=\frac{5}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{2}bc+\frac{3}{4}c^2$$

서로 종속된 변수가 있는 식이므로 두 변수의 관계를 다른 식에서 찾아보겠습니다.
벡터의 크기로부터 $a^2+b^2+c^2\le 16$, $b^2+c^2\le 16-a^2$입니다. 이 때 좌변에서 원을 생각한다면, $b=\sqrt{16-a^2}\cos\theta$, $c=\sqrt{16-a^2}\sin\theta$로 둘 수 있습니다.
이를 대입해서 정리하면 $\dfrac{(16-a^2)}{4}\{4+\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta\}$.
여기에서 위에서 생각한 bc좌표평면상의 원을 다시 생각해보면 a는 원의 반지름만을, θ는 벡터 (b,c)와 $(1,0)$이 이루는 각만을 나타내므로 두 변수 a,θ는 서로 독립된 변수임을 알 수 있습니다. 따라서 문제의 최댓값을 구하기 위해서는 $16-a^2$과 $4+\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta$ 각각의 최댓값을 구해주면 됩니다. 두 식의 최댓값은 각각 $16, 6$이므로 구하는 최댓값은 $16\div 4\times 6=24$입니다.

$sol2)$

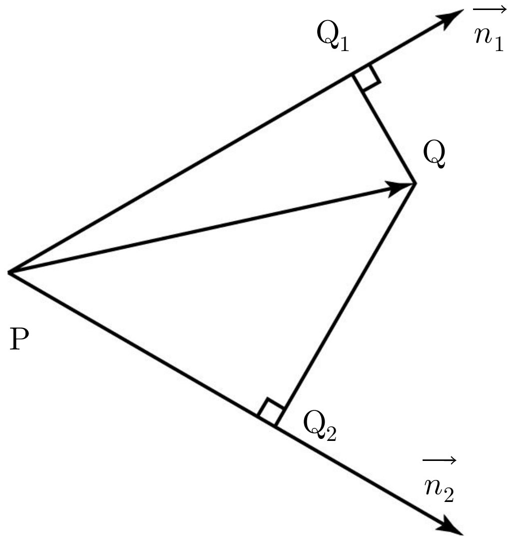
위와 마찬가지로 주어진 식을 $\{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 두 법선벡터에 대한 정사영의 제곱의 합$\}$으로 해석합니다. 이 때 선분 PQ의 정사영의 크기는 선분의 길이와 두 벡터 사이의 각에 의해 결정되는데, P와 Q는 반지름이 2인 원 위를 돌아다니는 벡터이므로 크기가 0이상 4이하인 모든 방향의 벡터를 표현할 수 있습니다. 정사영의 크기는 선분의 길이와 비례하므로 처음부터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 크기를 4로 고정하고 시작하겠습니다.

두 법선벡터$(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$임은 쉽게 알 수 있고 이 상황을 그림으로 다시 나타내면 다음과 같습니다.



$\overrightarrow{n_1}$과 $\overrightarrow{n_2}$의 시점을 P로 일치시킨 후 두 벡터를 포함하는 평면 α를 생각해서 Q의 α로의 정사영을 Q′라고 합니다. 그러면 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}| \le |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$. 구하는 값은 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}|$의 정사영으로 보는게 간단하고, 마찬가지로 정사영의 크기는 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}|$에 비례하므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}|$를 최대로 고정해서 생각하도록 하겠습니다.

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}|$이 최댓값 $|\overrightarrow{PQ}|$를 가지려면 Q와 Q′이 일치해야 합니다. 다시 말하면 Q가 평면 α위에 있을 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}|$은 최댓값을 가집니다. Q가 평면 α위에 있을 때의 그림을 다시 그려서 생각하죠.



$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$에서 반시계방향으로 잰 $\overrightarrow{\mathrm{PQ_1}}$와의 각을 θ_1, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$에서 시계방향으로 잰 $\overrightarrow{PQ_2}$와의 각을 θ_2라고 항상 $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{3}$입니다.

그러면 구하는 값은

$$(4\cos\theta)^2 + \left(4\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\right)^2$$

$= 4\{4 + \cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta\}$의 최댓값이므로

답은 24.

30. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
> (나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

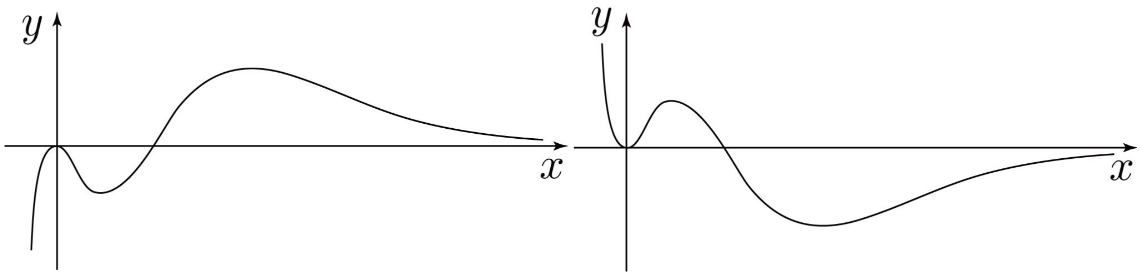
$sol1)$

$f(x)=ax^2+bx+c$라고 하면
$g'(x)=(f'(x)-f(x))e^{-x}=(-ax^2-(b-2a)x-c+b)e^{-x}$,
$g''(x)=(f(x)-2f'(x)+f''(x))e^{-x}=(ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c)e^{-x}$
입니다.
연립방정식 $g''(1)=g''(4)=0$을 계산하면 $c=0, b=-a$을 얻습니다.
이를 g, g', g''에 각각 대입하면
$g(x)=a(x^2-x)e^{-x}$, $g'(x)=-a(x^2-3x+1)e^{-x}$, $g''(x)=a(x^2-5x+4)e^{-x}$ 입니다.

이제 조건 (나)를 이용합시다.
$y=g(x)$의 $(t, g(t))$에서의 접선의 y절편을 t에 대한 함수 $h(t)$로 나타내면

$$h(t)=g(t)-tg'(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$$

이 함수 $h(t)$에 대하여 방정식 $h(t)=k$이 서로 다른 세 실근을 가질 조건을 $h(t)$의 그래프를 통해 알아보겠습니다.
$h'(t)=-at(t-1)(t-4)e^{-t}$이므로 a의 부호에 따라 $y=h(t)$의 그래프는 다음과 같이 나뉩니다.



$a>0$ $a<0$

이 때 $a<0$인 경우에는 조건을 만족하는 k는 양수구간에 존재하므로 $a>0$입니다.
($a=0$인 경우는 상수함수이므로 당연히 조건을 만족하지 않습니다.)
$-1<k<0$이려면 $h(t)$의 극댓값, 즉 $h(1)=-1$이어야하므로 이를 계산하면 $a=e$를 얻습니다.

$\therefore g(x)=(x^2-x)e^{-x+1}$, $g(-2)\times g(4)=6e^{-3}\times 12e^3=72$

$sol2)$

함수를 구하는 과정에서 계산을 조금 줄일 수 있는 풀이입니다.

다음 내용은 비슷한 함수를 몇번만 미분해봤으면 어렵지 않게 추측하고 증명할 수 있습니다.

$(*)$ $h(x)=\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\right)e^{kx}$꼴로 표현되는 함수 $h(x)$의 도함수 $h'(x)$는
마찬가지로 $h'(x)=\left(b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0\right)e^{kx}$꼴이다.

따라서 $g'(x)$와 $g''(x)$는 모두 상수항이 없는 (이차식)$\times e^{-x}$꼴이 됩니다.
아무 단서가 없는 $g(x)$를 미지수를 이용해 표현하고 미분하면 계산이 복잡해지니
실근(변곡점의 x좌표)의 정보가 주어져있는 $g''(x)$를 결정하는것으로 풀이를 시작하겠습니다.

위 정리와 $g''(1)=g''(4)=0$을 이용하면

$$g''(x)=a(x-1)(x-4)e^{-x}=a\left(x^2-5x+4\right)e^{-x}$$

으로 쓸 수 있습니다. 부분적분을 이용해서 $g'(x)$를 구하면

$$g'(x)=a\left(-x^2+5x-4-2x+5-2\right)e^{-x}=-a\left(x^2-3x+1\right)e^{-x}$$

이고, ($(*)$에 의해 $g'(x)$의 상수항은 0.) 다시 한 번 부분적분을 이용하면

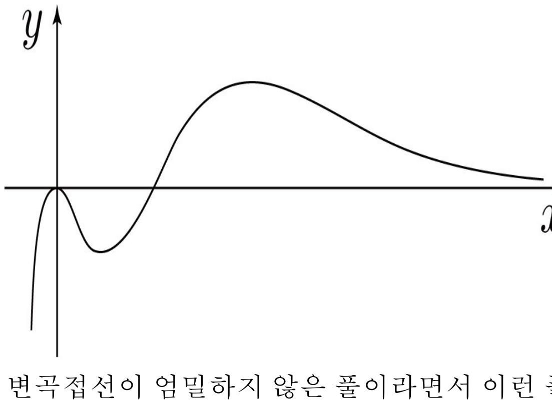
$$g(x)=a\left(x^2-3x+1+2x-3+2\right)e^{-x}=a\left(x^2-x\right)e^{-x}\quad (g(x)\text{는 상수항이 없으므로})$$

$$\therefore g(x)=a\left(x^2-x\right)e^{-x}$$

이 후의 풀이는 $sol1)$과 동일합니다.

$sol3)$

위의 두 방법 중 한 가지로 $g(x)=a\left(x^2-x\right)e^{-x}$를 구했다고 칩시다.
이번엔 번거롭게 $h(t)$같은 함수를 생각하지 말고 그래프에서 직접 접선의 갯수를 바로
찾아보죠. 이런 방법으로 풀기로 마음을 먹으면 $a>0$인것은 바로 찾을 수 있습니다.



본인의 그림실력의 문제로..
접선을 그려보는건 가볍게 생략하고,
결국 그릴 수 있는 접선의 갯수가 바뀌는
점은 변곡점에서의 접선의 y절편임을
알 수 있습니다.
즉 $(1,0)$에서의 접선이 $(0,-1)$을 지납니다.
그 말은 $g(x)$의 $x=1$에서의 접선의 기울기가
1이라는 소리이므로 $g'(1)=1$을 계산하면
마찬가지로 $a=e$를 얻습니다.

변곡접선이 엄밀하지 않은 풀이라면서 이런 풀이는 잘못됐다는 얘기도 많지만
변곡접선이 출제의도가 아니라고 하기엔 너무 많은 문제가 변곡접선만으로 풀려버리니
이쯤되면 믿고 사용해도 되는게 아닐까 싶습니다.