수1 도형 특강 _ 반드시 푸는 법

수1에서의 도형 문제 포지션은 한참 달릴 때 걸리적거리는 위치,

혹은 시험장에서 갑자기 보이지 않아 공황 상태를 유발하는 주범이죠.

이런 도형 문제를 항상 완전히 잘 풀지 못하는 사람들이 하는 말은

언제나 동일합니다.

“어떤 날은 지이이인짜 잘 풀리는데요, 어떤 날은 지이이이인짜 안 풀려요..”

왜 그런걸까요?

도형 풀이는 마치 우리가 여러 갈림길에서 올바른 길을 계속 선택하는 것과

같습니다. 정해진 풀이가 몇 개 되지 않아서 그 중 선택하는 거거든요.

어떤 날 잘 찍으면 그냥 풀리는 거지만, 잘 안 찍히면..? 이런 것이죠.

그러면! 우리가 여러 풀이를 유형화해서 정리하고!

그리고 그 풀이가 어디에 쓰이는지 일일이 대응하면!

그럼 언제나 한 번에 풀겠네요...? 그렇죠. 이 생각을 제가 고3 때 했고,

저는 이런 생각을 하면 전부 그 날 바로 정리해버립니다. 그 얘기를 오늘

이 칼럼으로 풀어볼게요..!!!!

수 1 도형에서 우리가 할 수 있는 도구들

우리가 배우는 도형은 총 몇 가지인가요?

2가지입니다. 원과 삼각형. 이 두 가지로 모든 도형을 표현할 수 있고,

당연히 수능 문제는 모두 풀립니다. 그럼 원과 삼각형의 성질을 정리합시다.

삼각형의 성질

삼각형의 정의는 간단하죠. 우리는 문제에서 쓸 성질들만 빠르게 정리합시다.

그러기 위해서는 반드시 얘기할 소재가 바로 **'삼각비'**입니다.

삼각비는 직각삼각형에서, 두 변과 빗변 총 3변끼리의 비를 정리해둔 것이고,

우리는 삼각비를 통해 두 가지 법칙을 사용합니다.

1. sin법칙 // 2. cos법칙

우리가 쓸 수 있는 법칙이라고는 이 2가지뿐입니다...

그렇기 때문에 우린 당연히 '직각'을 최우선적으로 찾아야 합니다. 왜?

직각이 있으면 그 직각삼각형에서 바로 삼각비를 구할 수 있으니까.

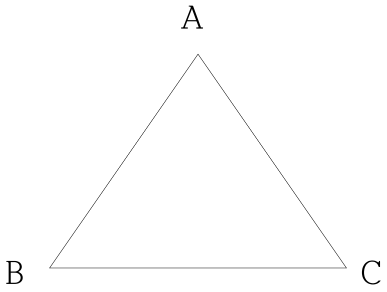
직각이 여의치 않을 때 우리는 저 두 가지 법칙을 이용해 역으로 삼각비를

구할 수 있을 것입니다.

그럼 직각을 찾는 것과 두 가지 삼각비 법칙은 어떻게 쓰일까요.

정리해볼게요.

1. sin법칙



그림과 같은 삼각형 ABC에서 대변의 길이를 a, b, c라 할 때

'$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$(외접원의 지름)'이 Sin 법칙이죠.

뜯어보면, 1) 삼각형의 변과 2) 각의 Sin값과 3)외접원의 지름

총 3가지 요소를 연결해주는 등식입니다.

요소 간에 연결이 되어있다는 것은 언제나 치환이 가능하고

우리가 이동할 수 있다는 것이고 즉, ${}_3C_2$만 충족되면 나머지 하나가 나옵니다.

여기까지는 다 아시는 내용이니 지루하셨겠죠.

그럼 누구나 알고 있던 이 사실들이 어떻게 쓰이는지 생각해보자고요.

Sin의 성질 중 하나에 초점을 맞춥시다.

우리가 도형에서 각을 나타낼 때 Sin과 Cos 중 어느 것이 착각을 일으키지

않고 안전하게 문제를 풀 수 있게 해줄까요? 뭐가 더 편할까요?

답은 Cos입니다.

왜냐면 Cos은 값이 양수냐 음수냐에 따라 예각과 둔각이 정해지지만,

Sin은 합이 π만 유지하면, 두 각의 Sin 값은 동일합니다.

$\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$이니까요.

그럼 문제에서 Sin값이 동일하다고 하면 우리는 2가지 태도를 취해야죠.

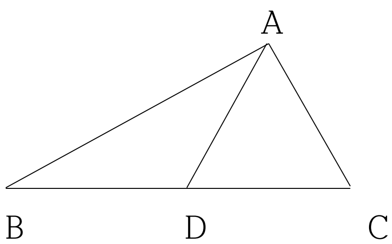
1) 아 두 각이 같구나. 2) 아 두 각이 더하면 π 인 예각과 둔각이구나.

1)이었으면 그냥 두 각이 같은 이등변 삼각형이라고 줬을 겁니다.

결국 Sin값이 같다는 건 2)를 뜻하는 거죠.

그럼 Sin 값이 동일하다는 조건이 주어졌을 때 우리가 취해야 하는 태도는

'대변의 비율이 외접원의 지름을 결정한다.'일 겁니다. 간단하게 문제 내볼게요



삼각형 ABD의 외접원과 삼각형 ADC의 외접원 반지름의 비는 7:3이다. 구할 수 있는 것은?

생각해보시죠!

$\angle ADB = (\pi - \angle ADC)$--> Sin 값이 동일.

Sin법칙; $a = 2R sin A$이므로, $\overline{AB} : \overline{AC} = R_1 : R_2$=7:3

$\therefore \overline{AB} : \overline{AC} = 7 : 3$

이런 식으로 외접원의 반지름과 변의 길이가 상관관계를 이룬다는 것을

알게 됐죠. 이걸 왜 해본걸까요?

삼각형으로 우리가 다루는 요소들인 각, 변, 외접원의 지름을

우리는 Sin법칙으로 요소 간의 관계를 파악한 겁니다.

즉, 문제에서 삼각형에다가 선 띡 하나 그려놓으면 자동으로 Sin값이 동일한

두 각이 생기고, 그로 인해 '변의 비 = 외접원의 반지름 비' 라는 걸 언제나

물어본다는 거죠.

많은 문제들을 풀어봄으로써 출제자가 제시한 조건을 이렇게 '해석'할 줄 아는

것이 도형 문제 풀이의 '목표'라고 생각하시면 됩니다. 오호라?

Cos 법칙은 뭐죠?

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 뜯어보면, 한 각의 cos값과 세 변의 길이에 대한 관계를

엮어주는 공식이고, 우리는 '각 하나와 변 길이 3개'를 이 공식으로 엮을 수

있다는 거라는 말입니다. 세상에.. 자꾸 아는 소리만 해서 지겹다고요..?

죄송합니다. 하지만 정말 이것들을 알고 계셨다면 도형 문제가 막힐 리가요...

원의 성질

원은 혼자 출제되지 못합니다. 결국 안에 삼각형이 내접하든

아니면 원에 삼각형이 외접하든 어떻게든 삼각형과 엮여서 나올 거에요.

그럼 삼각형과 원을 출제자가 엮고 싶으면 쓰는 방법이 뭘까요?

1) Sin법칙을 통해 외접원을 등장시킨다. 2) 직각삼각형을 이용해 빗변을 지름으로 하는 원을 등장시킨다. 3) 직각삼각형 두 개가 서로 빗변을 공유한다면, 두 삼각형에 모두 외접하는 원을 등장시킨다. 4) 일정한 각을 유지한다는 조건으로 '원주각'을 등장시킨다.

1) ~ 4)의 어떤 경우든 결국 우리가 삼각형과 원을 이어줄 방법은,

두 도형의 관계를 나타낼 방법은 오로지 'Sin 법칙뿐이라는 겁니다.'

더불어, 중학교 도형에 나오는 교과서 원의 성질은 학습이 되어있어야 하죠.

[원주각과 둘레각의 관계], [할선 정리] 같은 것들이요.

이런 도형의 성질들을 학습할 때

제가 앞서 해왔던 것들처럼 도형 요소들 간의 (각, 변, 외접원 반지름 등)

관계를 표현하는 용도에 초점을 맞춰 학습을 해주십사 부탁드리는 겁니다.

그럼 지금까지 간단히 도형 문제 풀 때 필요한 원과 삼각형의 성질과 Sin,

Cos 법칙을 정리했고 이제 문제와 함께 **'도형 반드시 풀기'**를 봅시다.

도형 문제를 언제나 같은 속도로 잘 푸는 방법

두괄식으로 써보겠습니다.

1. 문제에서 구하고자 하는 것을 파악한다.

2. 구하고자 하는 답을 도출할 수 있는 도형을 찾는다. (원이나 삼각형)

3. 그 도형을 온전히 파악할 수 있는 요소들을 구할 방법을 생각한다.

4. 구해야 할 요소들을 살피며, 요소들 간의 관계에 적합한 법칙이나 도형의 성질을 떠올린다.

5. 문제에서 제시한 조건과 연결지어서 생각해본다.

이 순서에 따라 도형 문제를 앞으로 풀 건데, 지금은 무슨 말인지 모르셔도

됩니다. 어차피 문제에 맞춰 제가 일일이 설명드릴게요. 해봅시다!

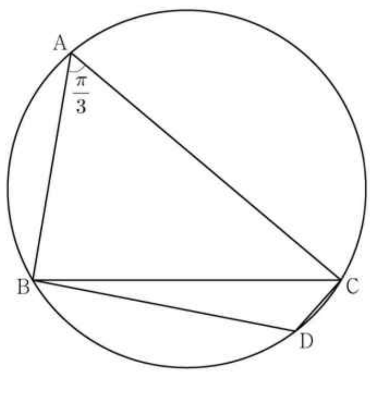
쉬운 문제부터.

반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다.

점 A 를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여

$\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD} + \overline{CD}$의 값은? [4점]

(2022학년도 9월 평가원 12번)



1. 문제에서 구하고자 하는 것을 파악한다.

$\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은?

2. 구하고자 하는 답을 도출할 수 있는 도형을 찾는다.

결국, 삼각형 BCD에서 승부를 봐야겠군.

3. 그 도형을 온전히 파악할 수 있는 요소들을 구할 방법을 생각한다.

삼각형 BCD를 온전히 파악하려면 세 변을 알거나, 두 변과 끼인 각 정도는 알아야 내가 답을 구할 수 있겠군.

4. 구해야 할 요소들을 살피며, 요소들 간의 관계에 적합한 법칙이나 도형의 성질을 떠올린다.

문제에 원이 있으니 Sin법칙으로 삼각형 BCD와 연관지어야겠고, 여차하면 Cos법칙으로 변들을 구해야겠네.

5. 문제에서 제시한 조건과 연결지어서 생각해본다.

반지름을 아는 원과 각 A

--> $\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2\times 2\sqrt{7}=4\sqrt{7}\quad \therefore \overline{BC}=2\sqrt{21}$

$\sin(\angle BCD)$

--> Sin값을 알고, 외접원 지름 알고 아하. 그럼 Sin법칙 쓰면 $\overline{BD}$ 나오겠네. 잉? $\overline{BD}$ 알면, 우리의 타겟인 $\overline{CD}$는 저절로 나오네? Cos법칙 쓰면 되니까??? 적용하자.

$\overline{BD}=\sin(\angle BCD)\times 2R=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\times 4\sqrt{7}=8$, $\angle BDC=\dfrac{2}{3}\pi$ ($\because$ 원에 접하므로)

$\cos(\angle BDC)=\dfrac{(8)^2+(\overline{CD})^2-(2\sqrt{21})^2}{2\times 8\times \overline{CD}}=\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}\quad \therefore \overline{CD}=2$-> 답은 10..!

무지성으로 보여서 푸는 게 아니라 **'생각을 하면서'** 푸는 과정을 보인 겁니다.

왜 하필 출제자가 저 조건을 준 것인가. 이걸 의식적으로 생각하며

도형 문제를 푸는 데에 익숙해진 사람은 도형 문제가 다른 대수 문제와 다를

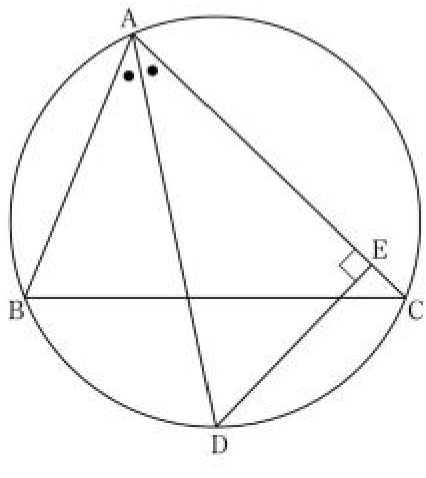
바가 없어집니다.

수학도 하나의 언어입니다. 과연 저 도형의 모양과 각과 변의 길이가 의미하는

바가 뭘까? 출제자가 내게 뭘 알려주려고 한 걸까? 그런 걸 고민해봅시다.

한 문제만 일단 더 해봅시다.

$\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$인 예각삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D , 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E 라 하자. 선분 AE 의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오. [4점]
(2021년 고3 10월 교육청 21번)



눈으로 제가 하는 것처럼 구하고자 할 것을 생각하고 그걸 어느 삼각형이나

원에서 구해야 하고, 어떤 법칙과 도형의 성질을 써야 할지 생각해봅시다!

1. 문제에서 구하고자 하는 것을 파악한다.

$k\ (=\overline{AE})$의 값을 구해야 하군요.

2. 구하고자 하는 답을 도출할 수 있는 도형을 찾는다.

결국, 삼각형 ADE에서 승부를 봐야겠군. $\angle BAD = \theta$라고 하면,
$k = \overline{AD} \times \cos\theta$를 쓰고 싶군.

3. 그 도형을 온전히 파악할 수 있는 요소들을 구할 방법을 생각한다.

삼각형 ADE를 온전히 파악하려면 말 그대로 $\overline{AD}$와 $\cos\theta$를 구해야 할텐데, $\overline{AD}$를 구하려면 어디서 구할까... 삼각형 ADE는 우리가 구하고 싶은 곳이니까 안되고, 흠... 그러면, 삼각형 ABD 정도..? θ도 있으니까 나쁘지 않네.

4. 구해야 할 요소들을 살피며, 요소들 간의 관계에 적합한 법칙이나 도형의 성질을 떠올린다.

원이 있다고 해도 Sin법칙을 쓰려면 각이나 지름을 알아야 하는데 흠.

5. 문제에서 제시한 조건과 연결지어서 생각해본다.

오오 각 DAB와 각 DAE가 모두 θ네. 그럼 원주각이니까 현의 길이가 같겠다.
--> $\overline{BD} = \overline{CD}$. 값을 x라 하자.
오 $\overline{BD}$는 내가 구하려 하는 삼각형 ABD의 길이니까 딱딱 들어맞네..!
이제 문제에서 준 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$도 써보자. 그러면...
SIn법칙은 앞서 말한대로 못 쓰니 Cos 법칙해볼까...

삼각형 ABD: $x^2 = (6)^2 + (\overline{AD})^2 - 2 \times (6) \times \overline{AD} \times \cos\theta$
삼각형 ADC: $x^2 = (8)^2 + (\overline{AD})^2 - 2 \times (8) \times \overline{AD} \times \cos\theta$
두 식의 우변을 같다고 하고 정리하면,
$\overline{AD} \times \cos\theta = \dfrac{(8)^2 - (6)^2}{4} = 7 = k \therefore 12k = 84$ 잉 답이 나왔네.

놀랍게도 이 문제는 당시 고3들이 많이 당황스러웠다고 말했던 문제입니다.

제가 서술한 방법 말고도 더 쉬운 방법도 있지만,

논리적으로 주어진 조건을 보면서 내가 구해야 할 것이 무엇인지 파악하고,

도대체 어느 삼각형에서 구해야 하는지만 의식적으로 생각하면 되는데 말이죠.

제가 계속 하는 짓은 **'내가 뭘 구해야 하지?', '오 이걸 구해야 하네. 그럼 어느 삼각형에서 구하지?' 이 두 질문의 반복입니다.**

도형 문제를 이렇게 논리적으로 푸는 연습을 하면, 기복이 있을 수가 없어요.

도형의 성질을 모두 꿰차고 있는 분은 이제 문제를 풀 때 이 태도를 취하시면,

분명 점수가 오르실거고,

나는 도형의 성질도 잘 모르는 거 같다고 생각하시는 분은

제가 앞서서 보여드렸던 대로, 배우고자 하는 도형의 성질이나 법칙이

어떤 요소들 간의 상관관계를 보여주는지, 그렇다면 언제 써야 하는지에

초점을 맞춰서 공부하시면 눈에 띄는 성장을 이뤄내실 수 있을 겁니다.

별 내용 없는 거 같지만, 속는 셈치고 저 태도를 장착한 채로

딱 10문제만 풀어보세요. 몸소 변화를 느끼실 수 있을 겁니다.