2022학년도 카톨릭대 의대 논술

수학 오전 [해설]

[빠른 정답]

1. $p = \frac{19}{45}$, $q = \frac{73}{156}$

2. $p = 29$, $q = 40$, $r = \frac{3}{4}$

3. $L = \frac{1}{2}(p-3)(p^2-3p+3)$

4. (1) $n = 1$ (2) $m = 6$

Problem 1.

상자 A에는 검은색 공 1개, 흰 공 4개가 있고 상자 B에는 검은색 공 3개, 흰 공 2개가 있다. 이때, 서로 다른 주사위를 3개를 던져서 제일 큰 수와 제일 작은 수의 차이가 2 또는 4이면 A를 꺼내고 그렇지 않으면 B에서 공을 꺼내는 시행을 수행한다. 꺼낸 공을 상자 안에 다시 넣지 않는다고 할 때, 첫 번째 시행에서 검은 공을 꺼낼 확률이 p이고, 첫 번째 시행에서 흰색 공을 꺼냈을 때 두 번째 시행에서 검은 공을 꺼낼 확률이 q이다. p와 q의 값을 각각 구하여라.

Solution.

먼저, 상자 A에서 공을 꺼낼 확률을 p_A이고 상자 B에서 공을 꺼낼 확률을 p_B라고 두고 둘을 각각 계산한다.

(a) 제일 큰 수와 제일 작은 수의 차이가 2인 경우

그럼 최솟값과 최댓값의 순서쌍은 $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,5)$, $(4,6)$이므로 가능한 모든 경우의 수는 $4\times(3^3-2^3-2^3+1)=48$가지이다.

(b) 제일 큰 수와 제일 작은 수의 차이가 4인 경우

그럼 최솟값과 최댓값의 순서쌍은 $(1,5)$, $(2,6)$이므로 가능한 모든 경우의 수는 $2\times(5^3-4^3-4^3+3^3)=48$가지이다.

이상에서 $p_A=\dfrac{48\cdot 2}{6^3}=\dfrac{4}{9}$이고, 이때 $p_B=1-p_A=\dfrac{5}{9}$이다. 그럼 첫 번째 시행에서 검은색 공을 뽑을 확률은

$$p=p_A\times\frac{1}{5}+p_B\times\frac{3}{5}=\frac{19}{45}$$

이다. 한편, 첫 번째 시행에서 흰 공을 뽑을 확률 p'은

$$p'=1-p=\frac{26}{45}$$

이고, 첫 공이 흰 색이고 두 번째 공이 검은색일 확률을 구하자. 표로 도시하면

A에서 흰 공을 뽑고, A에서 검은 공을 뽑는 경우	$p_A\times\left(\frac{4}{5}\right)\times p_A\times\left(\frac{1}{4}\right)$
A에서 흰 공을 뽑고, B에서 검은 공을 뽑는 경우	$p_A\times\left(\frac{4}{5}\right)\times p_B\times\left(\frac{3}{5}\right)$
B에서 흰 공을 뽑고, A에서 검은 공을 뽑는 경우	$p_B\times\left(\frac{2}{5}\right)\times p_A\times\left(\frac{1}{5}\right)$
B에서 흰 공을 뽑고, B에서 검은 공을 뽑는 경우	$p_B\times\left(\frac{2}{5}\right)\times p_B\times\left(\frac{3}{4}\right)$

이므로, 조건부 확률의 정의에 따라 구하고자 하는 확률은

$$q = \frac{(p_A)^2 \times \frac{1}{5} + p_A p_B \times \frac{14}{25} + (p_B)^2 \times \frac{3}{10}}{p'} = \frac{73}{156}$$

이다.

■

Problem 2. (문제 변형)

실수 $a > 0$에 대해 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) = \frac{2}{a}\left| x - \frac{a}{2} \right| \left(-\frac{a}{2} < x \leq \frac{a}{2} \right), \quad f(x) = f(x-a)$$

이때, 방정식 $f(x) = 1$을 만족하는 양의 실근을 작은 순서대로 $x_1, x_2, \cdots$ 라고 놓자. 1000개의 근을 작은 순서대로 뽑은 것이

$$x_1, x_2, \cdots, x_{1000}$$

이며 이들 중 가장 작은 자연수 해가 1일 때, 정수인 $x_i\ (1 \leq i \leq 1000)$의 개수가 n이며, 이때 가능한 n의 개수를 k라고 두자. 이들을 작은 순서대로 나열한 것을

$$m_1, m_2, \cdots, m_k$$

라고 할 때 $m_{29} = p$, $m_{38} = q$이다. p, q의 값을 구하고, $n = q$일 때 $f\left(\frac{201}{200}\right) = r$의 값을 구하여라.

Solution.

그래프를 도시하면, $x_k = ka \ (k = 1, 2, \cdots)$이다. 이때 총 1000개의 근

$$a, 2a, \cdots, 1000a$$

중에서 제일 작은 자연수 근이 1이므로, a는

$$a = \frac{1}{k} \quad (1 \le k \le 1000)$$

의 꼴을 취한다. 그럼 정수인 $x_i \ (1 \le i \le 1000)$의 개수 n은 집합

$$\left\{ \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \cdots, \frac{1000}{k} \right\}$$

중에서 정수인 것의 개수이므로 $n = \left[\frac{1000}{k} \right] \quad (1 \le k \le 1000)$이다. 그럼 가능한 모든 n은 1000개의 수

$$\left[\frac{1000}{1} \right], \left[\frac{1000}{2} \right], \left[\frac{1000}{3} \right], \cdots, \left[\frac{1000}{1000} \right]$$

중 서로 다른 자연수이다. 이때, 부등식

$$\frac{1000}{k} - \frac{1000}{k+1} \le 1$$

을 해결하면 $k \ge 32$이다. 이는 수열

$$\left(\left[\frac{1000}{k} \right] \right)_{k=1}^{1000} = \left[\frac{1000}{1} \right], \left[\frac{1000}{2} \right], \left[\frac{1000}{3} \right], \cdots, \left[\frac{1000}{1000} \right]$$

은 $k \ge 32$에서 1보다 작게 감소한다는 뜻이므로 이들은 1부터 32까지의 자연수를 서로 겹치면서 취한다. 실제로 아래와 같이 나열하면,

$$\left[\frac{1000}{31} \right] = 32, \left[\frac{1000}{32} \right] = 31, \cdots, \left[\frac{1000}{36} \right] = 27, \left[\frac{1000}{37} \right] = 27, \cdots$$

이다. 그럼 $m_k = k \ (1 \le k \le 31)$이다. 한편, $k \le 31$이면

$$\frac{1000}{k} - \frac{1000}{k+1} > 1$$

이므로 $\left[\dfrac{1000}{1}\right] = 1000$, $\left[\dfrac{1000}{2}\right] = 500$, $\cdots$, $\left[\dfrac{1000}{32}\right] = 31$ 은 서로 다른 자연수이다. 이상에서 $k = 62$ 이고 $m_k = \left[\dfrac{1000}{63-k}\right]$ $(32 \le k \le 62)$ 이다. 따라서

$$p = m_{29} = 29 \ , \ q = m_{38} = \left[\frac{1000}{25}\right] = 40$$

이다. 한편 $n = q$ 라면 $a = \dfrac{1}{25}$ 이고, 함수 $f(x)$ 에 대해

$$f(x) = f\left(x - \frac{1}{25}\right) = f\left(x - \frac{2}{25}\right) = \cdots = f(x-1)$$

이 성립하므로

$$r = f\left(\frac{201}{200}\right) = f\left(1 + \frac{1}{200}\right) = f\left(\frac{1}{200}\right) = 50\left|\frac{1}{200} - \frac{1}{50}\right| = \frac{3}{4}$$

가 구하고자 하는 정답이다.

■

Problem 3.

3 이상의 자연수 k에 대해, A, B를 포함한 $k+2$명의 사람 중에서 5명을 선택해 A, B가 이웃하도록 원탁에 앉는 경우의 수를 a_k라 두자. 이때 3보다 큰 소수 p에 대해 집합

$$S = \left\{ m \;\middle|\; m \geq \frac{a_k}{p}, \ m \in \mathbb{N} \right\}$$

의 원소 중 최솟값이 b_k이다. 이때, $\sum_{k=3}^{p-1} b_k$의 값을 구하여라.

Solution.

먼저 a_k를 구하면, 남은 k명 중 3명을 뽑고, A와 B를 한 쌍으로 취급해 원순열로 배열한 뒤 A, B의 순서를 고려하면 되므로

$$a_k = {}_k\mathrm{C}_3 \times \frac{4!}{4} \times 2 = 2k(k-1)(k-2)$$

이다. 이때 $k < p$이면 a_k가 p의 배수가 될 수 없으므로,

$$b_k = \left\lfloor \frac{2k(k-1)(k-2)}{p} \right\rfloor + 1 \quad (1 \le k \le p-1)$$

이다. 그럼

$$L = \sum_{k=3}^{p-1} b_k = (p-3) + \sum_{k=3}^{p-1} \left\lfloor \frac{2k(k-1)(k-2)}{p} \right\rfloor$$

이다. 한편, 두 번째 시그마를 정리하면

$$\sum_{k=3}^{p-1} \left\lfloor \frac{2k(k-1)(k-2)}{p} \right\rfloor = \sum_{k=2}^{p-2} \left\lfloor \frac{2(k^3-k)}{p} \right\rfloor$$

이고 $\dfrac{2(k^3-k)}{p} = c_k$라 두면

$$\begin{aligned} c_k + c_{p-k} &= \frac{2\left(k^3 + (p-k)^3\right) - 2\left(k + (p-k)\right)}{p} \\ &= 2p^2 - 6pk + 6k^2 - 2 \end{aligned}$$

로서 정수이므로

$$\begin{aligned} \lfloor c_k \rfloor + \lfloor c_{p-k} \rfloor &= c_k + c_{p-k} - 1 \\ &= 6k^2 - 6pk + (2p^2 - 3) \end{aligned}$$

임을 이용한다. 이상을 이용하여 위 식을 정리하면,

$$\sum_{k=2}^{p-2} \lfloor c_k \rfloor = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{p-2} \left(\lfloor c_k \rfloor + \lfloor c_{p-k} \rfloor \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{p-2} \left(6k^2 - 6pk + (2p^2 - 3)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} \left(6k^2 - 6pk + (2p^2 - 3)\right) - (2p^2 - 6p + 3)$$

$$= \frac{1}{2} (p^3 - 6p^2 + 10p - 3)$$

이므로 정리하면

$$L = \sum_{k=3}^{p-1} b_k$$

$$= (p-3) + \frac{1}{2} (p^3 - 6p^2 + 10p - 3)$$

$$= \frac{1}{2} (p-3)(p^2 - 3p + 3)$$

가 구하고자 하는 정답이다.

■

Problem 4.

다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이고 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이다. 극솟값이 0일 때, 열린 구간 (α, β)에서 방정식

$$f(x-f(x))=f(x)$$

를 만족하는 실근이 n개 있다고 하자. n으로 가능한 값이 존재하면 찾고, 이를 증명하여라.

(2) 최고차항의 계수가 $k\ (k>0)$인 삼차함수 $f(x)$의 극솟값이 0이고, 방정식

$$f(x-f(x))=f(x)$$

를 만족하는 실근은 5개 존재한다. 이들을 작은 순서대로 $a<b<c<d<e$라고 둘 때, $f(b)=f(d)$라고 한다. 이때

$$m=k(b-a)f(2b-c)$$

라 놓을 때, m의 값을 구하여라.

Solution. (1)

$n = 1$임을 보이겠다. 먼저 구간 (α, β)에서, 함수 $y = x - f(x)$는 증가인 연속함수이다. 그럼

$$\alpha - f(\alpha) < \alpha < \beta - f(\beta) = \beta$$

이므로 사잇값 정리에 따라 $c - f(c) = \alpha$인 실수 $c \in (\alpha, \beta)$가 존재한다. 이때

$$f(\alpha - f(\alpha)) - f(\alpha) < 0$$

$$f(c - f(c)) - f(c) = f(\alpha) - f(c) > 0$$

이므로 사잇값 정리에 따라 $f(t - f(t)) - f(t) = 0$인 실수 t가 적어도 하나 존재한다. 한편 구간 (α, c)에서 함수 $f(x - f(x))$는 증가하고 $f(x)$는 감소하며, 구간 (c, β)에서 두 함수는 모두 감소하고 $\alpha < x - f(x) < x$이므로 실근은 오직 하나 존재한다. 이상에서 $n = 1$이다.

■

Solution. (2)

먼저, 삼차함수의 최소의 실근 α에 대해 $x < \alpha$이면 주어진 방정식의 해가 없음을 보이겠다. 이는 $x < \alpha$이면

$$f(x) = f(x - f(x)) \Leftrightarrow x = x - f(x)$$

임에서 $f(x) = 0$이고, $x = \alpha$가 삼차함수의 최소의 실근임에서 모순이다. 한편 삼차함수의 모든 실근은 자명하게 방정식의 근이 되므로 $\alpha = a$이고, a는 삼차함수의 최소의 근이다. 이제 삼차함수의 남은 한 실근 β에 대해, 구간 (a, β)에서 방정식의 실근이 오직 하나 존재함을 보이자.

삼차함수의 극대점 $x = \gamma$에 대해, 문제 (1)에 따라 구간 (γ, β)에서는 오직 하나의 실근을 가지며 구간 (a, γ)에서는 $f(x)$는 증가함수이고 $x - f(x) < x < \gamma$이므로 방정식의 실근이 존재할 수 없다.

이상에서 삼차함수는

$$f(x) = k(x - a)(x - c)^2$$

의 꼴이고 그 사이에 방정식의 실근 $x = b$가 존재한다.

한편 조건에 따라 $f(b) = f(d)$이므로 $f(b) = t$라 두면 삼차방정식 $f(x) = t$의

세 실근이 $x = b$를 기준으로 대칭이 되게 존재해야 한다.
(세 실근이 $b - f(b)$, b, $b + f(b)$여야 하므로)
이상에서 $x = b$는 변곡점이고, 삼차함수의 비율 관계에 따라

$$f(b) = d - b = \sqrt{3}(c - b) = \frac{\sqrt{3}}{3}(c - a)$$

이다. 그럼 삼차함수는 변곡점에 대해 대칭이므로, 극대점에서 그은 직선이 다시 삼차함수와 만나는 점이 남은 한 근이다. 이때

$$b = \frac{a + 2c}{3},\ b - a = \frac{2(c - a)}{3}$$

이며 $f(b) = f\left(\frac{a + 2c}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}(c - a)$가 성립해야 한다. 정리하면

$$k\left(\frac{2(c - a)}{3}\right)\left(\frac{c - a}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(c - a)$$

이므로 $k = \frac{9\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{(c - a)^2}$이다. 한편

$$f(2b - c) = f\left(\frac{2a + c}{3}\right) = k\left(\frac{c - a}{3}\right)\left(\frac{2(c - a)}{3}\right)^2$$

이므로 대입하면,

$$\begin{aligned} m &= k(b - a)f(2b - c) \\ &= k^2 \times \frac{2(c - a)}{3} \times \frac{4}{27}(c - a)^3 \\ &= \frac{243}{2^2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{27} \\ &= 6 \end{aligned}$$

이 구하고자 하는 정답이다.

■

[총평]

해설 작업을 저녁 늦게 시작해서... 조금 늦었습니다.

문제는 경시색이 짙고, 시간 안에 전부 해소하기 어려움이 있었을 것입니다. 킬러는 없지만, 하나하나가 까다롭네요.

2번, 3번은 경시를 한 사람이면 굉장히 빨리 풀었을 문제라 좋은 출제는 아니예요.

다들 좋은 결과가 있기를 기원합니다.