1. 정답 ③

1) 지수로그 계산은 밑 통일하기

일단 지수를 벗겨볼까요? $27=3^3$이니까 $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$이고 $9=3^2$이니까 $9^{\frac{1}{2}}=3^{2\times\frac{1}{2}}=3$이네요. 결국 $\sqrt[3]{27}\times 9^{\frac{1}{2}}=9$입니다. 답은 ③번이네요.

2. 정답 ②

1) 문제해석

$f(x)=x^3-3x^2-9$인데 $f'(1)$를 구하랍니다. 미분하고 $x=1$을 넣으면 되겠죠? $f'(x)=3x^2-6x$이니까 $f'(1)=-3$입니다. 답은 ②번이네요.

3. 정답 ③

1) 등비수열 $a_n=ar^{n-1}$ (a는 첫항, r는 공비)로 놓기

$\{a_n\}$은 등비수열인데 첫째항이 1이랍니다. $a_n=r^{n-1}$로 놓으면 되겠죠?

그리고 $a_1+a_2=3$이랍니다. $a_n=r^{n-1}$에 $n=1$, $n=2$를 넣고 정리하면 $1+r=3$이고 $r=2$이네요.

$a_n=2^{n-1}$이고 $a_3=4$입니다. 답은 ③번이네요.

4. 정답 ④

1) 함수극한은 논리다

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$를 구하랍니다. 분모가 0으로 가는데 극한값이 존재한다는 건 분자도 0으로 가서 위아래가 같은 인수로 나눠져야 한다는 거죠? $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$이니까 결국 $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+3)=4$입니다.

답은 ④번이네요.

5. 정답 ①

1) 집합 식 변형

사건 A와 B가 서로 독립인데 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$랍니다! 독립이라면 $\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$가 성립해야 하죠? $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{9}$이네요.

그리고 $\mathrm{P}\left(A^C\cap B^C\right)$를 구하래요. 집합을 생각해보세요! $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$가 성립하죠? 따라서 $\mathrm{P}\left(A^C\cap B^C\right)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$입니다.

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이잖아요? 따라서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$입니다.

$\mathrm{P}\left(A^C\cap B^C\right)=1-\frac{7}{9}=\frac{2}{9}$이네요. 답은 ①번입니다.

6. 정답 ④

1) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 세 변의 길이

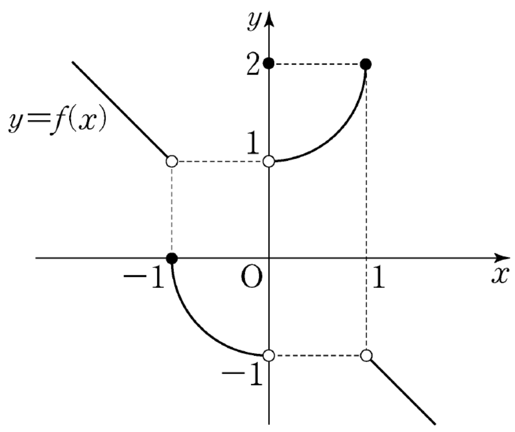
삼각형이 있는데 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=\sin\mathrm{A}$, $\overline{\mathrm{CA}}=\frac{1}{2}$로 세 변의 길이가 주어졌네요? 그러면 코사인법칙으로 각을 알 수가 있어요! 그런데 지금 $2\cos\mathrm{A}$를 구하라네요. 각은 A로 잡아볼게요!

$$\cos A = \frac{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \sin^2 A}{2 \times 1 \times \frac{1}{2}} = \frac{5}{4} - \sin^2 A$$ 입니다.

음....? 뭘 어쩌라는 거죠 이제? 근데 제곱을 보니까 생각나는 거 없나요? $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$가 있잖아요. 따라서 $\cos A = \frac{5}{4} - \sin^2 A = \frac{1}{4} + \cos^2 A$이고 $\cos^2 A - \cos A + \frac{1}{4} = \left(\cos A - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$이니까 $2\cos A = 1$이네요. 답은 ④번입니다.

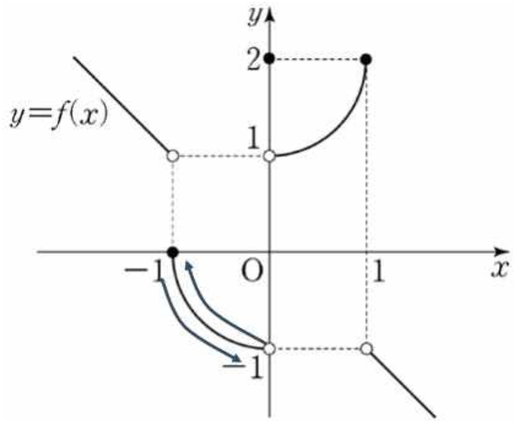
7. 정답 ②

1) $\lim_{x \to \alpha+} f(x) =$ $x = \alpha$보다 큰 쪽에서의 $f(x)$의 함숫값, $\lim_{x \to \alpha-} f(x) =$ $x = \alpha$보다 작은 쪽에서의 $f(x)$의 함숫값



이런 함수에서 $\lim_{x \to -1+} f(x) - \lim_{x \to 0-} f(x)$를 구하랍니다.

일단 $\lim_{x \to -1+} f(x)$은 $x = -1$보다 큰 쪽에서의 $f(x)$의 함숫값이죠? 그리고 $\lim_{x \to 0-} f(x)$은 $x = 0$보다 작은 쪽에서의 $f(x)$의 함숫값이구요.



이렇게 되네요. $\lim_{x \to -1+} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 0-} f(x) = -1$이니까

$\lim_{x \to -1+} f(x) - \lim_{x \to 0-} f(x) = 1$입니다. 답은 ②번이네요.

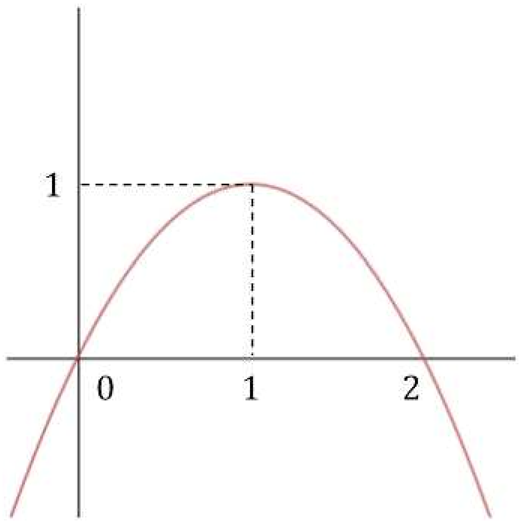
8. 정답 ①

1) 지수로그 계산은 밑 통일하기

$\log n \times \log \dfrac{100}{n}$가 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하랍니다. 밑은 통일되긴 했지만 $\dfrac{100}{n}$은 보기 불편하죠? $\log 100 - \log n = 2 - \log n$으로 바꿔줍시다.

그러면 $\log n \times (2 - \log n)$가 자연수가 되도록 하는 걸로 바뀌네요. 뭔가 이차함수랑 비슷하죠? $\log n = t$로 치환하면 $t(2-t)$가 자연수가 되게 만들어야 해요. $-t^2 + 2t$는 축이 $t=1$인 함수네요.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기



함숫값이 자연수가 되도록 하는 건 $t=1$만 되겠네요. 따라서 $\log n = 1$이고 $n=10$입니다. 답은 ①번이네요.

9. 정답 ③

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

$(x-1)^6$의 전개식에서 계수가 양수인 항의 개수를 구하래요! 일단 x^k의 계수는 ${}_6C_k \times (-1)^{6-k}$이죠? 양수가 되려면 $(-1)^{6-k}$에서 $6-k$가 0이거나 짝수가 되어야겠네요. 따라서 $k=0$, 2, 4, 6으로 4개입니다. 답은 ③번이네요.

10. 정답 ⑤

1) 문제해석

일단 $y=x^3-3x^2+x+n-1$에 접하는 직선 중에서 기울기가 최소인 직선을 찾아야겠네요. 도함수가 최소가 되는 지점을 찾으면 되겠죠?

일단 미분해보면 $y'=3x^2-6x+1$입니다. 이 이차함수는 축이 $x=1$이잖아요? 극소점이 $x=1$이니까 기울기가 최소가 되는 부분은 $x=1$일 때네요. 기울기는 -2이구요, 함숫값은 $n-2$이니까 직선 l은 $y=-2x+n$입니다.

x절편은 직선 l이 x축과 만나는 점의 x좌표잖아요? 따라서 $a_n=\frac{n}{2}$이네요.

$\sum_{n=1}^{10}2a_n=\sum_{n=1}^{10}n=\left(\frac{1+11}{2}\right)\times 10=55$입니다. 답은 ⑤번이네요.

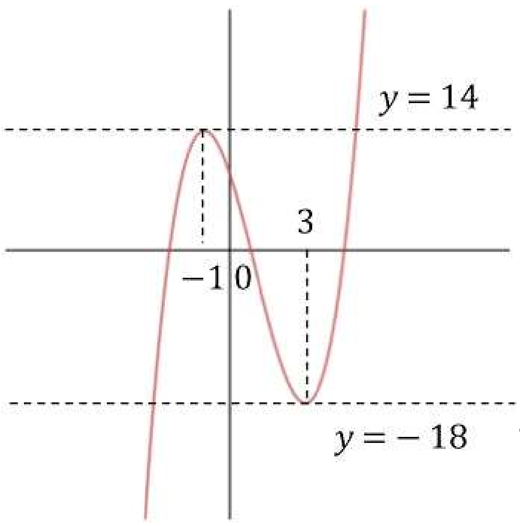
11. 정답 ③

1) 미지수 넘기기,

방정식 $x^3-3x^2-9x+9-k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 음수 k를 구하랍니다. 일단 미지수를 우변으로 넘겨볼까요? 그러면 $x^3-3x^2-9x+9=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 음수 k를 구하는 것이 되네요. 사실상 $y=x^3-3x^2-9x+9$와 $y=k$가 만나는 점이 2개가 되도록 하는 음수 k를 구하라는 거네요.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

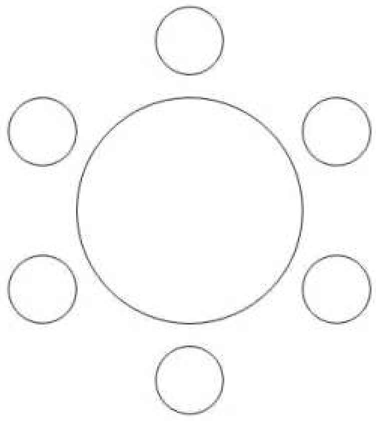
그럼 그래프를 그려봅시다. 일단 $y=x^3-3x^2-9x+9$를 미분하면 $3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$이니까 $x=-1$에서 극대, $x=3$에서 극소입니다. 극댓값은 14이구요, 극솟값은 -18입니다.



이렇게 되네요. 결국 $y=k$와 두 점에서 만나려면 $k=14$이거나 $k=-18$이어야 합니다. k는 음수니까 $k=-18$이네요. 답은 ③번입니다.

12. 여섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, A와 B가 서로 마주보고 앉거나 A와 C가 이웃하게 되는 경우의 수는? [3점]

① 56　② 60　③ 64　④ 68　⑤ 72

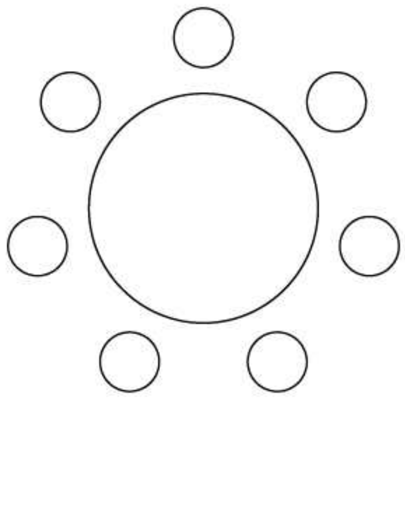


참고문항!(답은 맨 아래에 있어요!)

위부터 2021학년도 6월 12번, 2021학년도 9월 14번

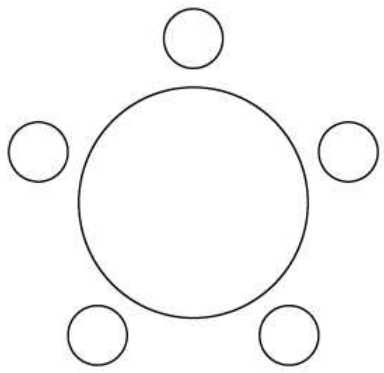
12. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 1학년 학생끼리 이웃하고 2학년 학생끼리 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 96　② 100　③ 104　④ 108　⑤ 112



14. 다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

① 180 ② 200 ③ 220 ④ 240 ⑤ 260



답: ① (2021학년도 6월 12번) ④ (2021학년도 9월 14번)

12. 정답 ②

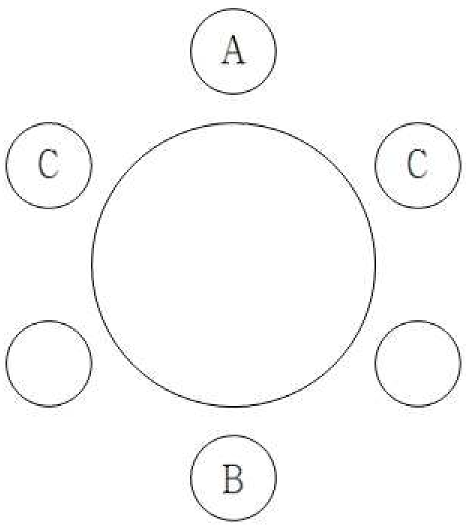
1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

A, B, C를 포함한 6명이 원 모양 탁자에 둘러앉을 때, A, B가 마주보거나 A, C가 이웃하는 경우의 수를 구하랍니다. 일단 A, B가 마주보는 경우의 수, A, C가 이웃하는 경우의 수 각각을 구한 다음에 겹치는 경우의 수를 빼면 되겠죠?

일단 A, B가 마주보는 경우의 수를 구해봅시다. 일단 6개의 자리 중에서 A를 먼저 배치할게요. 그럼 경우의 수는 1입니다. 아무도 앉지 않은 탁자에서는 어느 곳에 앉아도 구별이 안 되거든요. 그러면 자동적으로 B의 위치도 A의 반대편이 되죠? 이것도 경우의 수는 1이네요. 이러면 나머지 4명은 배열만 하면 됩니다. 경우의 수는 $4!=24$이네요.

이번엔 A, C가 이웃하는 경우의 수를 구해봅시다. 일단 A, C를 하나로 묶을게요. 그러면 묶음 안에서 배열이 가능하죠? 경우의 수는 2입니다. 묶고 나머지 4명과 함께 배열하면 되겠네요. 한 사람을 미리 배치하고 나머지 4명을 배열해도 되고, 360° 돌렸을 때 겹치는 게 5번이니까 $\frac{5!}{5}=4!$으로 가도 되겠네요. 어떤 방법을 사용하든 $2\times4!=48$입니다.

이제 겹치는 경우를 구해볼까요? 일단 A, B가 마주봐야 하니까 아까처럼 A를 아무데나 배치한 후 반대편에 B를 배치하면 됩니다. 그 이후에는



C가 저렇게 2개의 자리에 올 수 있죠? 경우의 수는 2이구요, 나머지 3명을 마저 배열하면 $3!=6$이네요. 겹치는 경우의 수는 12입니다.

따라서 구하는 경우의 수는 $24+48-12=60$이네요. 답은 ②번입니다.

+코멘트!

6평과 9평 모두 원순열이 나왔어요! 원순열을 보는 방법은 두 가지입니다. n명의 사람이 있을 때, 무작위로 한 명을 고른 다음에 아무데나 앉혀 두고 나머지 $n-1$명의 사람을 $(n-1)!$으로 배열하는 방법, 360° 돌렸을 때 겹치는 건 n번이므로 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$으로 계산하는 방법이 있어요! 앞으로 원순열을 보면 이런 관점을 적용해서 풀어보시길 바랍니다!

여기에 더해서 이웃할 때는 하나로 묶어서 처리하는 것도 알아두세요! 묶은 안에서도 배열해야 하는 것 잊지

마시구요!

13. $0 \le x < \dfrac{5}{6}\pi$일 때, $f(x) = \cos^2 x + a\sin x + 2$는 $x = b$에서 최댓값 $\dfrac{13}{4}$를 갖는다. $\dfrac{ab}{\pi}$의 값은? (단, $0 < a < 2$) [3점]

① $\dfrac{1}{12}$　② $\dfrac{1}{6}$　③ $\dfrac{1}{4}$　④ $\dfrac{1}{3}$　⑤ $\dfrac{5}{12}$

참고문항!(답은 맨 아래에 있어요!)

2021학년도 9월 17번

17. $\angle A = 90°$이고 $\overline{AB} = 2\log_2 x$, $\overline{AC} = \log_4 \dfrac{16}{x}$인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x = a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a + M$의 값은? (단, $1 < x < 16$) [4점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

답: ① (2021학년도 9월 17번)

13. 정답 ②

1) 문제해석

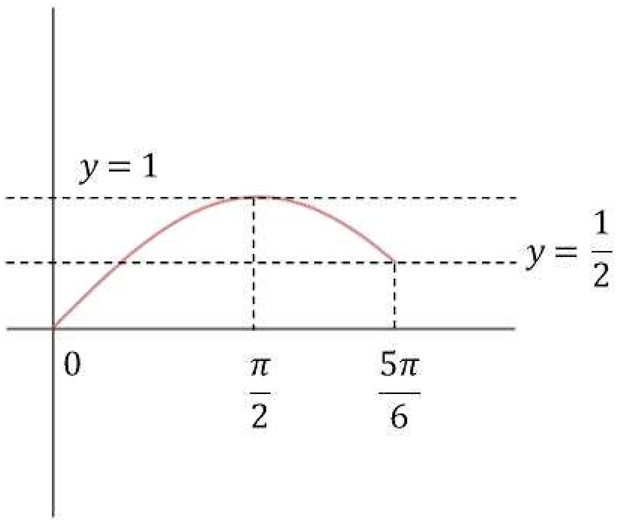
$0 \le x < \frac{5}{6}\pi$에서 $f(x)=\cos^2 x + a\sin x + 2$가 $x=b$에서 최댓값 $\frac{13}{4}$을 갖는답니다. 하나의 문자로 정리되어 있어야 뭘 하든 말든 하겠죠? $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$을 이용해봅시다. $f(x)= -\sin^2 x + a\sin x + 3$입니다.

이차함수랑 모양이 비슷하죠? $\sin x = t$라 하면 $f(x)= -t^2 + at + 3$인 이차함수입니다.

범위도 확인해볼게요. $\sin x = t$인데 $0 \le x < \frac{5}{6}\pi$이잖아요?

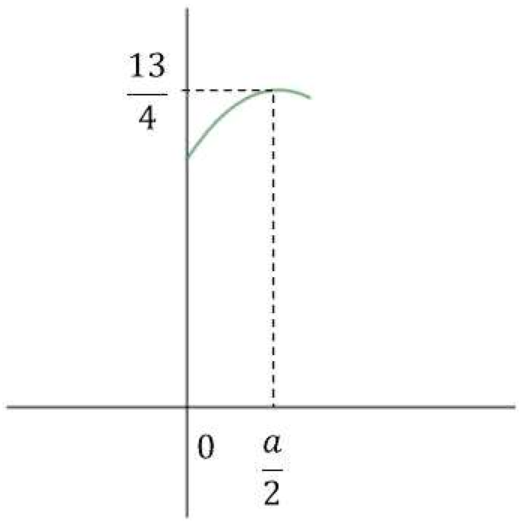
2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$y=\sin x$를 그리면



이렇게 되네요. 범위에 끝자락에 해당하는 $x=\frac{5\pi}{6}$에서 함숫값이 $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$이네요. 결국 $0 \le t \le 1$이 됩니다. 우리는 $f(x)= -t^2 + at + 3$라는 함수에서 $0 \le t \le 1$의 범위만 보면 되는 거에요.

축이 $t=\frac{a}{2}$인 함수인데 $0<a<2$이니까 축이 $0 \le t \le 1$의 범위 안에 있네요? 따라서 그래프를 그려보면



이렇게 되겠네요. 결국 $x=\frac{a}{2}$에서 최댓값을 가지죠? 이 값이 $\frac{13}{4}$이니까 $f\left(\frac{a}{2}\right)= \frac{a^2}{4} + 3 = \frac{13}{4}$이고 $a^2 = 1$인데 $0<a<2$이니까 $a=1$입니다. $f(x)= -\sin^2 x + \sin x + 3$이네요.

그런데 주의할 점은 $f(x)= -\sin^2 x + \sin x + 3$가 최대가 되는 지점은 $x=\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$이 아니라는 거에요! 왜냐면

우리는 $\sin x = t$로 치환했잖아요. 따라서 우리가 구해야 하는 $x = b$는 $\sin x = \frac{1}{2}$를 만족시키는 x값입니다. 아까 그림 그려놨던 거 보면 $x = \frac{5\pi}{6}$에서 함숫값이 $\frac{1}{2}$이었는데 $0 \le x < \frac{5}{6}\pi$이니까 등호가 없잖아요? 따라서 대칭축인 $x = \frac{\pi}{2}$에 대칭되는 부분에 있는 $x = \frac{1}{6}\pi$가 b입니다. $a = 1$이고 $b = \frac{1}{6}\pi$이니까 $\frac{ab}{\pi} = \frac{1}{6}$이네요. 답은 ②번입니다.

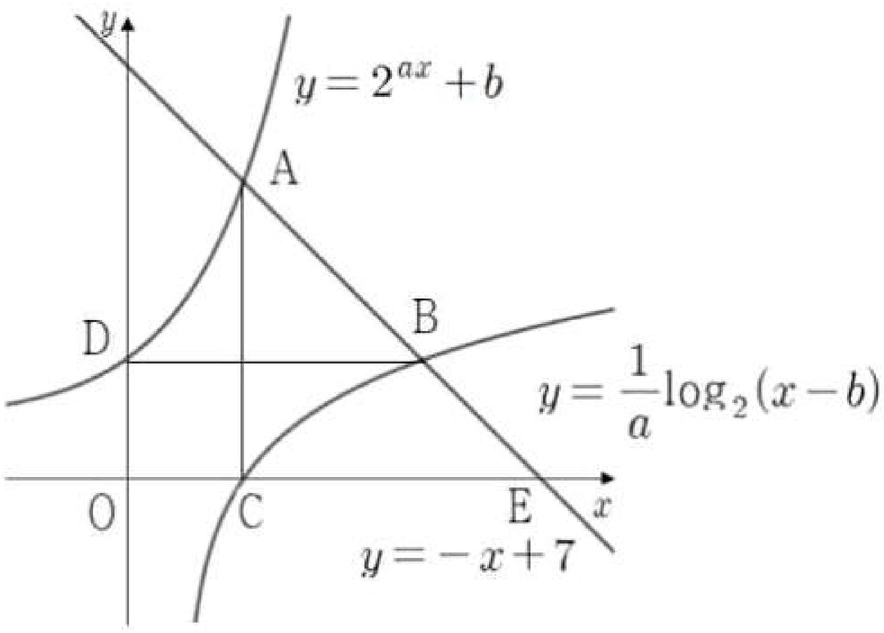
+코멘트!

9평 17번에서도 비슷한 논리가 쓰였어요. 이차함수의 형태로 바꾼 후 최댓값과 최댓값을 가지는 x값을 구하라는 거였는데 x가 아니라 $\log_2 x$라는 걸로 함정을 팠었죠. 치환을 할 때는 항상 조심해야 합니다! 사실상 문제를 두 번 푸는 거거든요. $\sin x = t$로 치환했다면 첫 번째로 t를 먼저 구하고, 두 번째로 $\sin x = t$를 만족시키는 x값을 구하는 두 개의 과정을 거쳐야 하니까 실수하지 마세요!

14. 직선 $y=-x+7$이 곡선 $y=2^{ax}+b$과 만나는 점을 A, $y=\dfrac{1}{a}\log_2(x-b)$과 만나는 점을 B라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 C, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 D, 직선 $y=-x+7$과 x축이 만나는 점을 E라 하자.

곡선 $y=\dfrac{1}{a}\log_2(x-b)$과 x축이 만나는 점이 C, $y=2^{ax}+b$과 y축이 만나는 점이 D이고 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BE}}=3:2$일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

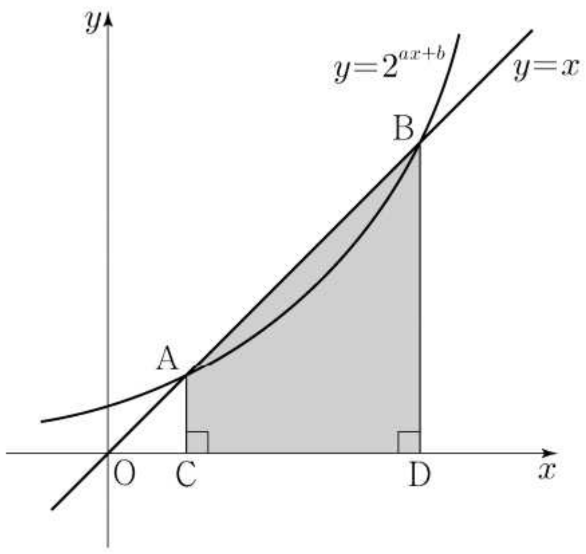


참고문항!(답은 맨 아래에 있어요!)

2021학년도 9월 15번

15. 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



답: ④ (2021학년도 9월 15번)

14. 정답 ②

1) 문제해석, 그림 있으면 그림 보면서

그림에 대충 다 나와 있는 것 같네요. $y=-x+7$가 있는데 얘가 $y=2^{ax}+b$와 만나는 점이 A,

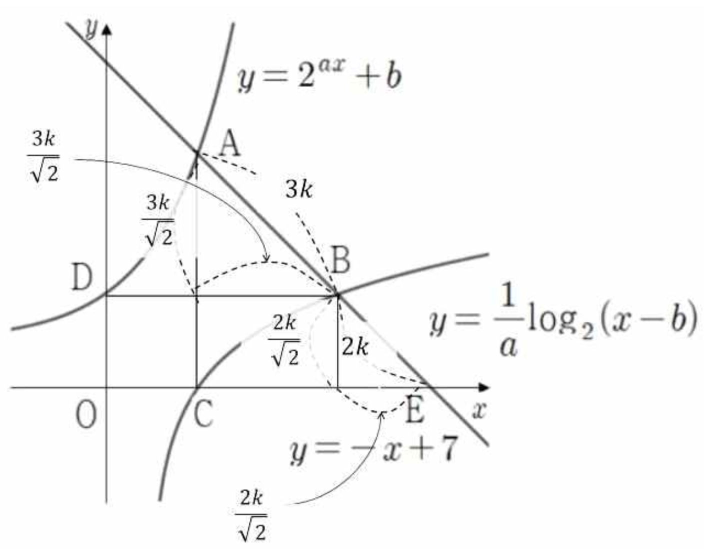
$y=\frac{1}{a}\log_2(x-b)$와 만나는 점이 B랍니다. 그리고 A에서 x축에 내린 수선의 발이 C인데 이 점은

$y=\frac{1}{a}\log_2(x-b)$가 x축과 만나는 점이구요, B에서 y축에 내린 수선의 발이 D인데 이 점은 $y=2^{ax}+b$가 y축과 만나는 점이랍니다. 그리고 $y=-x+7$가 x축과 만나는 점이 E라네요.

일단 E의 좌표는 알겠어요. E(7, 0)이네요. 그리고 나머지는...... 일단 다른 조건부터 봅시다. 함부로 좌표를 잡지 말라고 했잖아요?

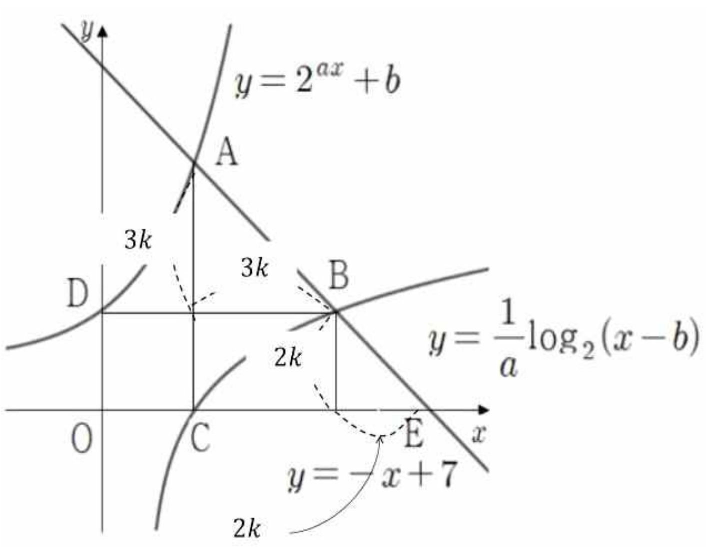
그리고 $\overline{AB}:\overline{BE}=3:2$랍니다. 이거부터 해볼까요? 일단 $\overline{AB}=3k$, $\overline{BE}=2k$라 해봅시다.

그러면



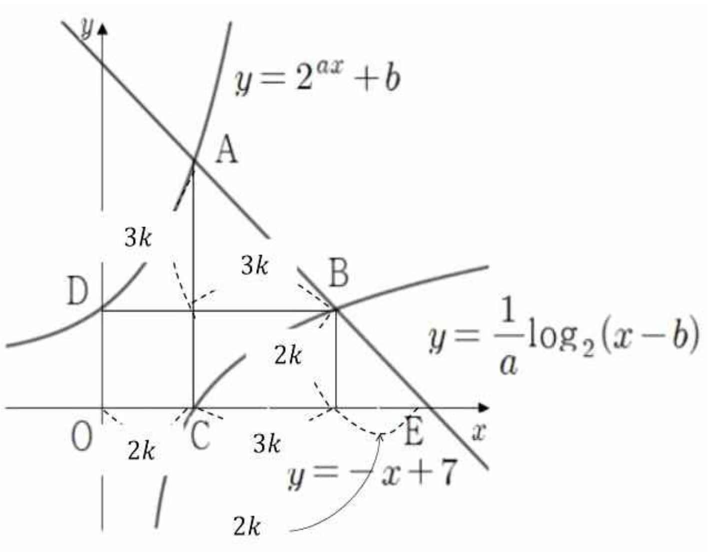
이렇게 되겠네요.

그런데 루트가 있으니까 너무 불편해요. 그냥 차라리

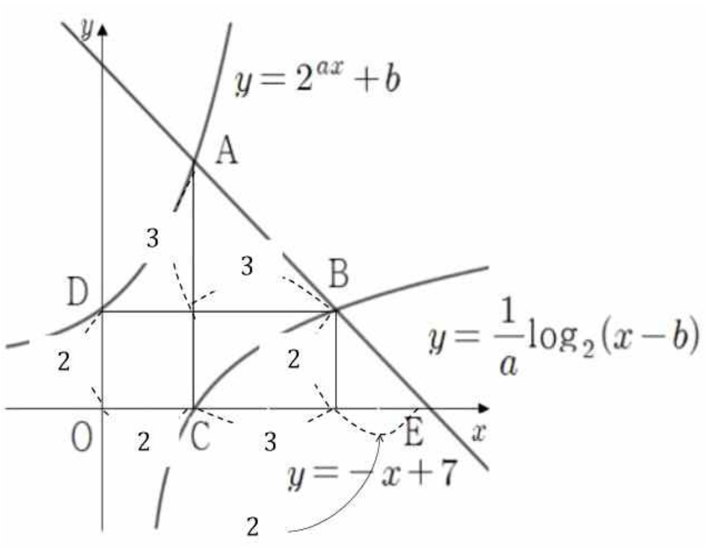


이렇게 설정합시다. 이거 어차피 이렇게 해도 $\overline{AB}:\overline{BE}=3:2$가 유지되잖아요?

그런데 $y=2^{ax}+b$와 $y=\frac{1}{a}\log_2(x-b)$는 서로 역함수 관계에 있죠? 그러면 $y=-x+7$와 y축이 만나는 점을 F라 하면 $\overline{AB}:\overline{FA}=3:2$도 성립합니다. 따라서



이렇게 되겠네요. $2k+3k+2k=7$이 되고 $k=1$이네요.



이렇게 됩니다.

D의 좌표는 (0, 2)이고 A의 좌표는 (2, 5)이네요. 결국 $y=2^{ax}+b$는 (0, 2)와 (2, 5)를 지나야 합니다.

그럼 계산만 하면 되겠네요. $y=2^{ax}+b$가 (0, 2)를 지나니까 $b+1=2$이고 $b=1$입니다. $y=2^{ax}+1$가 (2, 5)를 지나니까 $2^{2a}+1=5$이고 $2^{2a}=2^2=4$입니다. $a=1$이네요. $a+b=2$이고 답은 ②입니다.

+코멘트!

9평에서 지수함수와 일차함수를 이용한 문제가 나왔었죠? 이런 문제를 만났을 때 함부로 먼저 좌표를 잡지 마세요! 미지수로 좌표를 잡다가 오히려 더 헷갈릴 수 있으니까요. 대신 문제를 읽으면서 그림에 적용할 수 있는 조건을 파악하고 그거부터 하나씩 확인해보세요. 그러면 자연스럽게 좌표가 나올 거에요!

15. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = 2t^3 - 3at^2 + 3$$

이다. 점 P의 운동방향은 점 P의 위치가 -5일 때 바뀐다. $t = 2a$에서의 점 P의 속도는? (단, $a > 0$) [4점]

① 24　② 30　③ 36　④ 42　⑤ 48

참고문항!(답은 맨 아래에 있어요!)

위부터 2018학년도 6월 17번, 2021학년도 6월 15번, 2021학년도 9월 13번

17. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t > 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 - 12t + k \ (k\text{는 상수})$$

이다. 점 P의 운동 방향이 원점에서 바뀔 때, k의 값은? [4점]

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

15. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = -4t + 5$$

이다. 시각 $t = 3$에서 점 P의 위치가 11일 때, 시각 $t = 0$에서 점 P의 위치는? [4점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

13. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = t^2 - at \quad (a > 0)$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 움직이는 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리가 $\frac{9}{2}$이다. 상수 a의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

답: ④ (2018학년도 6월 17번)　④ (2021학년도 6월 15번)　③ (2021학년도 9월 13번)

15. 정답 ⑤

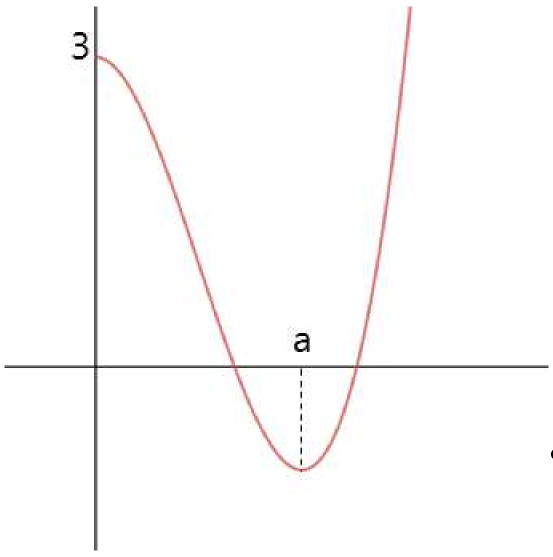
1) 위치, 속도, 가속도는 수직선 위를 움직인다

점 P가 수직선 위를 움직이는데 시각 t에서 위치가 $x=2t^3-3at^2+3$라고 합니다. 수직선 위에서 왔다리갔다리한다는 걸 잊으면 안 되겠죠?

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$2t^3-3at^2+3$은 인수분해는 안 되는 것 같죠? 미분해서 극점 찾고 그래프 그려봅시다.

$x'=6t^2-6at=6t(t-a)$이죠? $t=0$에서 극대, $t=a$에서 극소에요. 그래프를 그려보면



이렇게 그려집니다.

3) 문제해석

점 P의 위치가 -5일 때 점 P의 방향이 바뀐다는 의미가 뭘까요? 아까 수직선을 생각해보세요. 점 P는 y축 위를 움직입니다. 그 방향이 바뀐다는 건? 그 점이 극점이라는 말 아닐까요? 시각이 -5가 아니라 위치가 -5일 때인데 점 P는 위치 함수의 함숫값만큼 수직선에서 움직이는 거니까 위치가 -5라는 건 함숫값이 -5라는 거에요.
그러니까 점 P의 위치가 -5일 때 점 P의 방향이 바뀐다는 것은 점 P의 극값이 -5라는 거겠죠. 위 그래프에서 $t=a$에서 극소가 되네요. 그렇다면 $t=a$를 넣었을 때의 값이 -5가 되어야겠죠? 따라서 $-a^3+3=-5$이고 이를 정리하면 $a=2$가 나오네요. $t=2a=4$이니까 $t=4$에서 점 P의 속도는 위치를 미분한 $x'=6t^2-12t$에 $t=4$를 넣으면 되니까 48입니다. 답은 ⑤번이에요.

+코멘트!

16. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}-\int_1^x |f(t)|dt$$

를 만족시킬 때, $3\int_0^2 f(x)dx$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

참고문항!(답은 맨 아래에 있어요!)

위부터 2021학년도 6월 17번, 2021학년도 9월 28번

17. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=4x^3+x\int_0^1 f(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

28. 함수 $f(x)=-x^2-4x+a$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 닫힌구간 $[0,1]$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

답: ① (2021학년도 6월 17번) 5 (2021학년도 9월 28번)

16. 정답 ④

1) 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

일단 $f(x)$가 다항함수인데 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}-\displaystyle\int_1^x|f(t)|dt$랍니다. 음.. 일단 자주 보던 형태는 아닌데요? 일단 행동강령대로 해봅시다. 먼저 정적분의 위끝에 변수가 있으니까 위아래가 같아지는 $x=1$을 넣으면 $f(1)=1$이 됩니다.

그리고 다항함수라니까 미분해야겠죠? 미분하면 $f'(x)=x^2-|f(x)|$입니다.

아니 이게 다항함수라구요? 다항함수에 어떻게 절댓값이 있어요!

2) 항등식은 수치대입, 계수비교

좌변에 있는 $f'(x)$가 다항함수니까 결국 우변에 있는 $x^2-|f(x)|$도 다항함수여야 합니다. 그 말은 항상 $f(x)\geq 0$이어서 $|f(x)|=f(x)$이거나 $f(x)<0$이어서 $|f(x)|=-f(x)$이어야 한다는 거겠네요.

그런데 아까 $f(1)=1$이라고 했잖아요? 그러면 항상 $f(x)\geq 0$이겠네요.

그리고 저 식은 항등식이잖아요? 우리는 $f(1)=1$이란 걸 알고 있구요. 저 식에 $x=1$을 넣으면 $f'(1)=0$가 나오네요.

계수비교도 해야죠? $f'(x)=x^2-f(x)$인데 일반적으로는 좌변과 우변의 최고차항의 차수가 같을 수가 없어요. $f(x)$의 차수가 무조건 더 크잖아요?

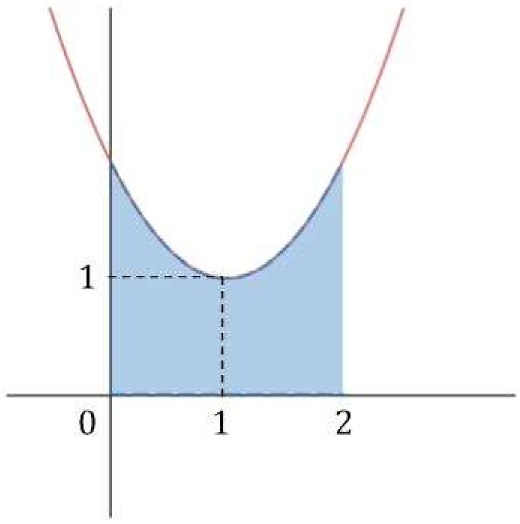
그러면 결국 $f(x)=x^2+ax+b$라서 좌변과 우변이 모두 1차식이 되도록 해야겠네요.

3) 함수 구하기 - 차함수

$f(x)$는 이차함수고 $f'(1)=0$, $f(1)=1$이라면서요. 최고차항의 계수는 1이구요. 그러면 $x=1$에서 $y=1$과 접해야하겠죠? 따라서 $f(x)-1=(x-1)^2$이고 $f(x)=(x-1)^2+1$입니다.

4) 정적분 관찰

저렇게 함수를 구했으면 바로 $3\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$를 정적분으로 계산해도 되지만, 조금만 더 편하게 해봅시다. $f(x)$의 그래프를 그려보면



이렇게 되잖아요? $f(x)$는 $x=1$축 대칭이니까 결국 $3\int_0^2 f(x)dx$는

$6\int_0^1 f(x)dx$가 됩니다. 이제 계산해보면 되겠네요.

$6\int_0^1 f(x)dx = 6\int_0^1 \{(x-1)^2+1\}dx = 6\left[\frac{(x-1)^3}{3}+x\right]_0^1 = 8$입니다. 답은 ④번이네요.

+코멘트!

뭐 사실 6평과 9평에 나온 정적분 변수가 너무 쉬워서 특이한 사항은 없었어요. 일단 먼저 정적분의 위끝과 아래끝이 같아지는 수를 넣고, 미분해서 조건에 맞게 행동하는 건 변하지 않습니다!

17. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 5^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따른다. 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하고, $f(x)$와 $g(x)$ 중 작지 않은 값을 $h(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

방정식 $h(x)=h(5)$의 모든 실근의 합은 $3m$보다 크다.

$h(5)=h(9)$일 때, $\mathrm{P}(7 \le Y \le 10)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $m>6$) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

① 0.159 ② 0.226 ③ 0.341 ④ 0.419 ⑤ 0.514

참고문항!(답은 맨 아래에 있어요!)

위부터 2017학년도 수능 29번, 2020학년도 가형 18번, 2021학년도 사관학교 17번

29. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10)>f(20)$
(나) $f(4)<f(22)$

m이 자연수일 때 $\mathrm{P}(17 \le X \le 18)=a$이다. $1000a$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

18. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\, 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\, 2^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.

$$f(12) \le g(20)$$

을 만족시키는 m에 대하여 $\mathrm{P}(21 \le Y \le 24)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328　② 0.6247　③ 0.7745
④ 0.8185　⑤ 0.9104

17. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\, 5^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\, 5^2)$을 따른다. 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. $\mathrm{P}(Y \le 2k)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $m \ne 10$) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915　② 0.8413　③ 0.9104　④ 0.9332　⑤ 0.9772

답: 62 (2017학년도 수능 29번)　① (2020학년도 수능 가형 18번)　⑤ (2021학년도 사관 17번)

17. 정답 ②

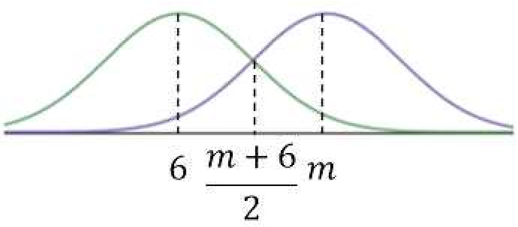
1) 문제해석, 부정표현은 바꿔라

$X \sim \mathrm{N}(6,\ 5^2)$이고 $Y \sim \mathrm{N}(m,\ 5^2)$랍니다. 그리고 X의 확률밀도함수를 $f(x)$, Y의 확률밀도함수를 $g(x)$라 하고, $f(x)$와 $g(x)$ 중 크거나 같은 값을 $h(x)$라 한답니다.

일단 표준편차가 같은 것에 주목해야겠죠? 표준편차가 같다면 $f(x)$와 $g(x)$는 평행이동하면 겹쳐지는 형태입니다. $f(x)$와 $g(x)$ 중 크거나 같은 값인 $h(x)$은 뭘까요? 일단 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 그리고 더 위에 있는 함수를 선택하라는 거겠죠? 그려봅시다.

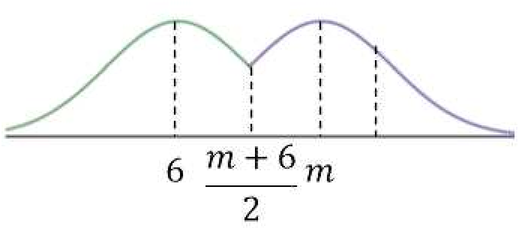
2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 $m>6$이니까

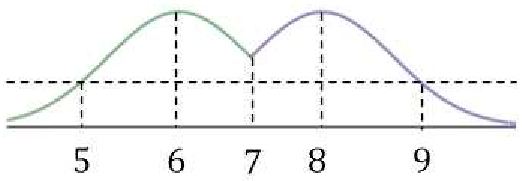


이렇게 됩니다. 그래프를 잘 관찰해보면 $f(x)$와 $g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 축으로 하는 대칭축에 대하여 대칭이 된다는 걸 확인할 수 있어요. 그 x좌표는 m과 6의 중점인 $\frac{m+6}{2}$이죠.

그리고 $h(x)$를 그려보면



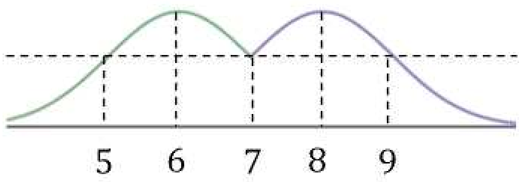
일단 $h(x)$는 이렇게 그려지구요. 이제 $x=5$와 $x=9$가 어디에 있을지 정해봅시다.



이렇게 될 수 있죠. 일단 $h(x)$는 $x=\dfrac{m+6}{2}$에 대하여 대칭인데

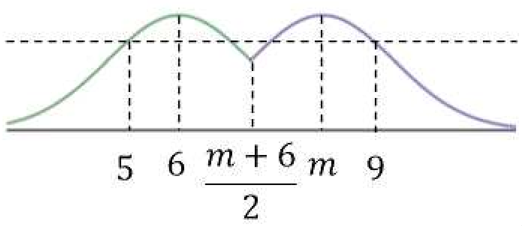
$h(5)=h(9)$이니까 $x=5$와 $x=9$의 중점이 $x=\dfrac{m+6}{2}$가 되어야겠죠? $m=8$입니다.

왼쪽의 $f(x)$는 $x=6$에 대하여 대칭이잖아요? 그러면 $f(5)=f(7)$이 성립해야 하니까 이 개형은 사실상



이거겠네요.

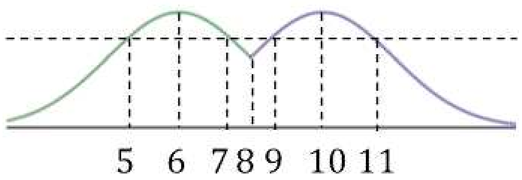
이러면 $h(x)=h(5)$의 실근은 $x=5,\ 7,\ 9$이죠? 합은 21입니다. 그런데 $m=8$이니까 $3m=24$잖아요? 합이 24보다 작은데요? 이건 안 되겠어요.



이거도 바로 위에 했던 거가 됩니다. $h(x)$는 $x=\dfrac{m+6}{2}$에 대하여 대칭이니까

$x=5$와 $x=9$의 중점이 $x=\dfrac{m+6}{2}$가 되어야죠. $m=8$이 됩니다. 안 되는 걸 확인했죠?

결국



이렇게 되어야겠네요. 간격이 맞지 않는 건 이해 좀 해주세요 ㅎㅎ

$m=10$입니다.

그리고 $h(x)=h(5)$의 실근은 $x=5$, $x=7$, $x=9$, $x=11$로 합은 32이네요. $3m=30$이구요. $3m$보다 실근의 합이 더 크네요!

4) 정규분포 보는 법

이제 $\mathrm{P}(7 \le Y \le 10)$를 구하면 되겠어요. $Y \sim \mathrm{N}(10,\ 5^2)$이니까 $\mathrm{P}(7 \le Y \le 10)$에서 10은 평균 $m(=10)$이구요, 7은 평균 $m(=10)$에서 $0.6\sigma(=3)$만큼 왼쪽으로 간 거니까

$\mathrm{P}(7 \le Y \le 10)=\mathrm{P}(-0.6 \le Z \le 0)=\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.6)$입니다. 표에서 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.6)=0.226$이니까 답은 ②번이네요.

+코멘트!

수능특강에서 두 정규분포의 확률밀도함수가 만나서 대칭이 되는 문제가 있었어요. 올해 사관학교에서도 나왔구요. 또한 두 정규분포의 확률밀도함수의 함숫값을 이용한 함수의 추론은 최근 많이 등장하고 있으니까 생각해주셔야 합니다! 두 함수가 만나는 점에서 두 함수가 서로 대칭이 되는 걸 생각해주자구요!

18. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\{a_n\}$과 S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{12}의 값은? [4점]

(가) $\lvert a_5 \rvert = a_6$
(나) $\lvert S_n \rvert = 24$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 3이다.

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

참고문항!(답은 맨 아래에 있어요!)

위부터 2020학년도 6월 28번, 2020학년도 9월 30번, 2020학년도 수능 15번

28. 첫째항이 2이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하시오. [4점]

(가) $4 < a_2 + a_3 \leq 12$
(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k = 122$

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선과 점 $(2, f(2))$에서의 접선이 점 $(k, 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

15. 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

답: 162 (2020학년도 6월 28번) 42 (2020학년도 9월 30번) ④ (2020학년도 수능 15번)

18. 정답 ①

1) 조건해석, 등차수열 $a_n = a+(n-1)d$ (a는 첫항, d는 공차)로 놓기

$\{a_n\}$이 등차수열인데 공차가 양수랍니다! 그러면 일단 $a_n = a+(n-1)d$ $(d>0)$이라고 하면 되겠죠?

(가)조건에서 $|a_5| = a_6$이라고 하네요. 생각을 좀 해봅시다. 아까 공차가 양수라고 했죠? 그러면 무조건 $a_5 < a_6$이어야 해요. 그런데 a_5에 절댓값을 씌우면 같아지네요. $a_5 = a_6$일 수는 없으니까 $-a_5 = a_6$이 되어야겠어요. $a_5 = a+4d$, $a_6 = a+5d$이니까 $-a-4d = a+5d$이고 $a = -\frac{9}{2}d$이네요.

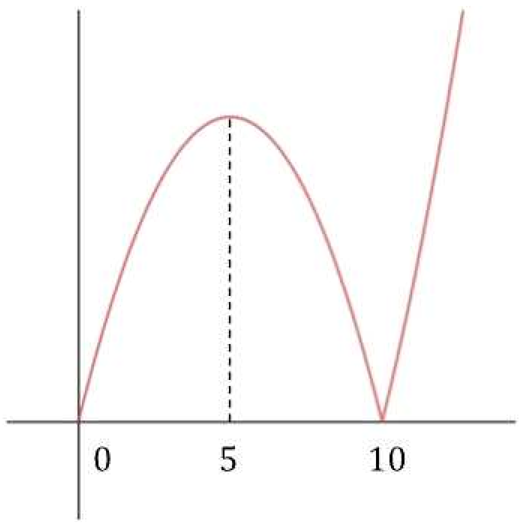
$a_n = \left(n-\frac{11}{2}\right)d$ $(d>0)$입니다.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 절댓값 함수, 자연수 보이면 숫자 넣을 준비

(나)조건에서 $|S_n| = 24$를 만족시키는 자연수 n이 3개가 있다네요. 일단 S_n부터 구해볼까요? 등차수열의 합 공식에 의하여 $S_n = \frac{(a_1+a_n)}{2}\times n = \frac{d}{2}n(n-10)$입니다.

여기에 절댓값을 씌운 값이 24가 되는 자연수 n이 3개가 있다구요? 음...

그런데 이거 뭔가 이차함수와 비슷하지 않나요? 최고차항의 계수가 양수인, $x(n)$축과 $n=0$, $n=10$에서 만나고 대칭축이 $n=5$인 이차함수인 거죠. 그러니까 대충



이렇게 되겠네요.

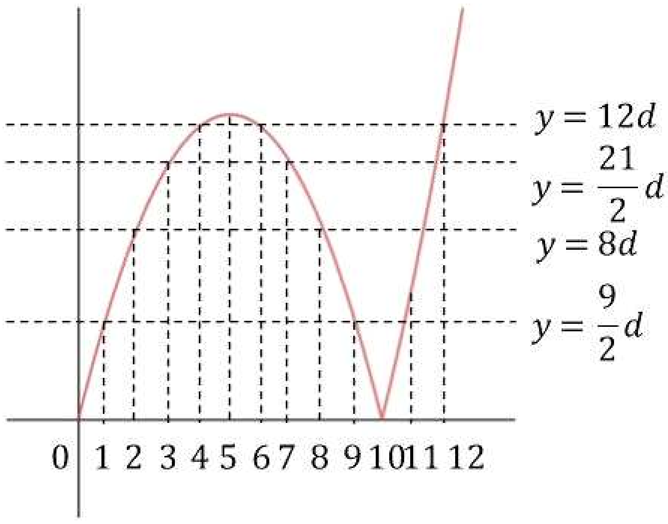
3) 자연수 보이면 숫자 넣기

아니 그런데 이 $y = |S_n|$이라는 함수와 3개의 점에서 만나는 직선은 매우 많은데요? 그림을 보세요!

"자연수"라고 했잖아요. 그럼 천천히 넣어봐야죠. 일단

$|S_1| = |S_9| = \frac{9}{2}d$, $|S_2| = |S_8| = 8d$, $|S_3| = |S_7| = \frac{21}{2}d$, $|S_4| = |S_6| = 12d$, $|S_5| = \frac{25}{2}d$입니다. 음... $n>10$일 때를 해봅시다. $|S_{11}| = \frac{11}{2}d$인데 뭐 같은 값을 가지는 게 없네요. 그리고 $|S_{12}| = 12d$입니다. 어? 이거 아까 봤잖아요! $|S_4| = |S_6| = |S_{12}| = 12d$이네요.

그리고 $|S_{13}|=\frac{39}{2}d$이니까 여기부터는 3개의 점에서 만날 수가 없게 되네요. 그러니까



이렇게 되겠네요!

이렇게 되면 3개의 점에서 만나는 건 $n=4$, 6, 12일 때 $|S_4|=|S_6|=|S_{12}|=12d$만 있어요. 이게 24가 되어야겠죠? 따라서 $12d=24$이고 $d=2$입니다.

$a_n=2n-11$이니까 $a_{12}=13$이네요.

+코멘트!

등차수열, 등비수열이 다항식의 형태로 있을 때 함수로 생각할 줄 알아야 합니다! 물론 정의역이 자연수로 한정된 함수죠. 등차수열은 일차함수, 등차수열의 합은 이차함수, 등비수열은 차수가 $n-1$인 다항함수죠. 이런 관점을 가지고 문제를 풀면 훨씬 더 쉽고 빠르게 답에 접근할 수 있을 거에요!

19. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

> (가) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\sqrt{f(k)}=6$
>
> (나) $f(x)=x$를 만족시키는 집합 X의 원소 x의 개수는 2이다.

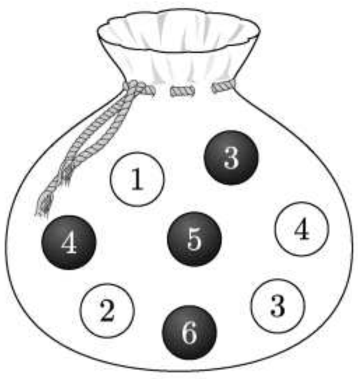
① $\dfrac{1}{648}$　② $\dfrac{1}{324}$　③ $\dfrac{1}{216}$　④ $\dfrac{1}{162}$　⑤ $\dfrac{5}{648}$

참고문항!(답은 맨 아래에 있어요!)

위부터 2021학년도 6월 20번, 2021학년도 6월 29번, 2021학년도 6월 가형 19번

20. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있을 때, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개일 확률은? [4점]

① $\dfrac{13}{29}$　② $\dfrac{15}{29}$　③ $\dfrac{17}{29}$　④ $\dfrac{19}{29}$　⑤ $\dfrac{21}{29}$



29. 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 A에서 A로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은 p이다. $120p$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $f(1) \times f(2) \geq 9$ (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

19. 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3\}$에 대하여 A에서 B로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

$f(1) \geq 2$이거나 함수 f의 치역은 B이다.

① $\frac{16}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{20}{27}$ ④ $\frac{22}{27}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

답: ③ (2021학년도 6월 20번) 15 (2021학년도 6월 29번) ④ (2021학년도 6월 가형 19번)

19. 정답 ①

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 중 하나를 고를 때 $\sum_{k=1}^{4}\sqrt{f(k)}=6$이고 $f(x)=x$를 만족시키는 X의 원소 x의 개수가 2일 확률을 구하랍니다.

일단 분모부터 구해볼까요? 정의역의 원소 1보고 "너 공역의 원소 6개 중에서 어떤 거 고를래?"라고 물어보면 6가지 대답이 가능하죠? 2한테 물어봐도 6가지 대답이 가능하구요. 계속 물어봐서 6까지 물어보면 경우의 수는 총 6^6이 됩니다.

2) 조건해석, 시그마 펼치기

분자를 구해봅시다. 일단 $\sum_{k=1}^{4}\sqrt{f(k)}=6$이라네요. 루트를 씌우고 다 더하면 6이 된다고 합니다.

이거 생각 좀 해봅시다. 만약 $f(k)$가 2, 3, 5, 6 이런 거라면? 다 더해서 절대로 자연수가 나올 수가 없습니다.

루트가 나와야죠. 그런데 다 더해서 자연수인 6이 나왔잖아요?

결국 $f(k)$는 1 또는 4이어야 합니다. 그래야 루트를 씌워도 자연수가 될 테니까요.

자연수 4개를 더해서 6이 되려면 어떻게 해야 하나요? 1144 이렇게 뽑아야겠네요. 그러면

$\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{4}=6$이 되잖아요. 그런데 어떤 수가 1을 가지고 4를 가질지는 아직 안 정했어요.

그리고 $f(x)=x$를 만족시키는 x가 두 개 있어야 한답니다. 이거 성립하려면 $f(1)=1$이거나 $f(2)=2$이거나 $f(3)=3$이거나 $f(4)=4$이거나 $f(5)=5$이거나 $f(6)=6$이 되어야 $f(x)=x$가 성립하는 거죠?

그런데 방금 전에 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$는 1144를 가져야 한다고 했잖아요. 이 중에서 $f(x)=x$가 성립하는 건 $f(1)=1$이거나 $f(4)=4$이죠. $f(5)=5$랑 $f(6)=6$도 있잖아요? 이거는 기준을 잡고 나눠봐야 할 것 같은데요?

$x=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 중에서 $f(x)=x$가 성립하는 x가 몇 개인지를 기준으로 잡고 나눠봅시다.

3) 케이스 분류

3-1) $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 중에서 $f(x)=x$가 성립하는 x 0개

그러면 무조건 $f(5)=5$, $f(6)=6$이 성립해야 합니다. 그리고 $f(1)\neq 1$, $f(4)\neq 4$이어야 하구요. 그러면 $f(1)=4$, $f(4)=1$이어야겠네요. 선택지는 1 아니면 4잖아요?

그런데 $f(2)$와 $f(3)$는 고를 수가 있네요. $f(2)=1$, $f(3)=4$일 수도 있고, $f(2)=4$, $f(3)=1$일 수도 있어요.

경우의 수는 2입니다.

3-2) $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 중에서 $f(x)=x$가 성립하는 x 1개

그러면 $f(1)=1$이거나 $f(4)=4$이어야 합니다. 일단 경우의 수는 2이에요.

$f(1)=1$, $f(4)\neq 4$라고 해봅시다. 그러면 $f(4)=1$이어야 해요. 선택지는 1과 4만 있으니까요. 그러면 자동적으로

$f(2)=f(3)=4$겠네요.

그리고 $f(5)=5$인지 $f(6)=6$인지도 정해야 해요. 경우의 수는 2이구요.

$f(5)=5$, $f(6)\neq 6$이라 해볼게요. 그러면 $f(6)$는 6을 제외한 5개의 숫자를 가질 수 있어요. 경우의 수는 5입니다.

총 $2\times 2\times 5=20$입니다.

3-3) $x=1$, 2, 3, 4 중에서 $f(x)=x$가 성립하는 x 2개

이러면 $f(1)=1$, $f(4)=4$이어야겠네요. $f(2)$, $f(3)$은 $f(2)=1$, $f(3)=4$일 수도 있고, $f(2)=4$, $f(3)=1$일 수도 있으니까 경우의 수는 2입니다.

그리고 $f(5)\neq 5$, $f(6)\neq 6$이어야 합니다. $f(5)$는 5를 제외한 5개의 숫자, $f(6)$은 6을 제외한 5개의 숫자를 가질 수 있네요. 총 경우의 수는 $2\times 5\times 5=50$입니다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{2+20+50}{6^6}=\frac{1}{648}$입니다. 답은 ①번이네요.

+코멘트!

6평의 확통에서는 단순히 케이스 분류하는 걸 넘어서 케이스 분류 후에 또다른 조건을 만족시켜야 하는 문제가 나왔어요. 단순히 케이스 분류만 하면 끝났던 전과는 다른 트렌드인 거죠. 그래서 케이스 분류 후에 조건끼리 연결시켜 또다시 조건을 만족시켜야 하는 형태의 문제를 출제해봤습니다! 확통에서 언제나 기본은 케이스 분류이지만 케이스 분류 이후에 또다른 조건들간의 연결이 있다는 걸 잊지 마세요!

20. 최고차항의 계수가 2이고 $f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$의 상수항과 계수, 극점의 x좌표는 모두 정수이다. (나) $f(x)$의 모든 극값의 곱은 9이다.

$f(1)>0$, $f'(1)<0$일 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

참고문항!(답은 맨 아래에 있어요!)

위부터 2020학년도 9월 17번, 2020학년도 수능 14번

17. 함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$의 극댓값이 4이고 $f(-2)>0$일 때, $f(-1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

14. 상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{x^3}=2$ (나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=-4$

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

답: ② (2020학년도 9월 17번)　③ (2020학년도 수능 14번)

20. 정답 ①

1) 조건해석, 정수 보이면 숫자 넣을 준비

삼차함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 2이고 $f'(2)=0$라고 합니다. $x=2$에서 극점을 가질 수도 있겠죠?

(가)조건에서 상수항과 계수, 극점의 x좌표가 모두 정수랍니다. 그러니까 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$라 하면

a, b, c가 모두 정수가 되고 극점의 x좌표도 모두 정수라는 거죠?

그러고 보니 아까 $f'(2)=0$라고 했었죠? 일단 정수이긴 하네요. 음... 조금만 더 가봅시다.

2) 정수 보이면 숫자 넣기

(나)조건에서 모든 극값의 곱이 9랍니다.

생각을 해보세요. $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서 a, b, c가 모두 정수잖아요. 그리고 $f'(2)=0$라고 했었죠? 일단 $x=2$에서 극값을 가져야 해요. 그런데 $f(x)$에 $x=2$를 넣은 $f(2)$는 정수죠? 왜냐면 $f(x)$의 상수항과 계수는 전부 정수잖아요.

또다른 극점의 x좌표도 정수잖아요? 그러니까 또다른 극값 역시 정수여야 해요. 그러면 결국 정수$\times$정수가 9가 되도록 만들어야 하겠네요.

이게 가능하려면 1×9이거나 -1×-9이어야죠. 3×3같은 건 될 수 없어요. 삼차함수의 극솟값과 극댓값이 같을 수가 없잖아요.

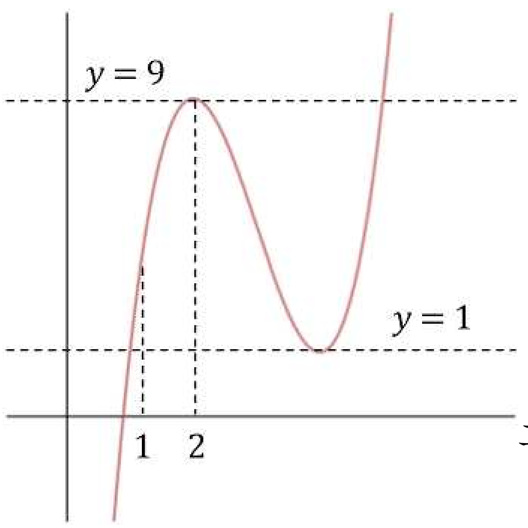
그럼 천천히 케이스를 나누고 가봅시다.

3) 케이스 분류

3-1) 극솟값이 1, 극댓값이 9일 때

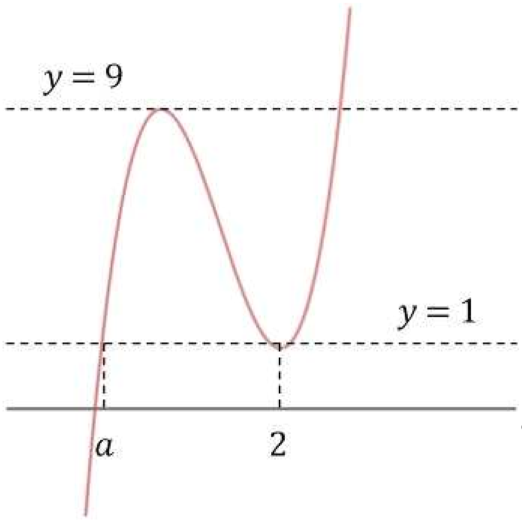
$f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 또는 극솟값을 가져야 해요. 이러면 또 케이스가 나뉘네요.

3-1-1) $x=2$에서 극대일 때



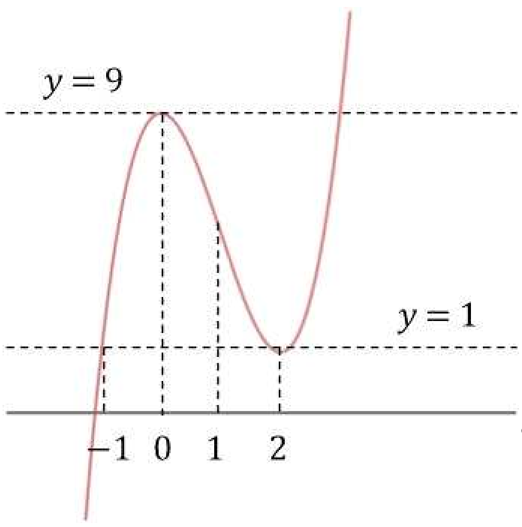
그래프가 대충 이렇게 그려지겠네요. 그런데 이러면 $f'(1)<0$가 아니잖아요.

3-1-2) $x=2$에서 극소일 때



이렇게 되는데 $x=1$이 어디 있는지를 모르겠어요. 일단 함수부터 구해봅시다.

$y=1$과 $y=f(x)$가 만나는 또다른 점의 x좌표를 a라 하면 차함수에 의해 $f(x)-1=2(x-2)^2(x-a)$이고 $f(x)=2(x-2)^2(x-a)+1$이 됩니다. 이때 극댓값이 9여야 하니까 미분하고 극대점 찾아봅시다. 미분하면 $f'(x)=4(x-2)(x-a)+2(x-2)^2=2(x-2)(3x-2a-2)$이니까 $x=\dfrac{2a+2}{3}$에서 극대입니다. 극댓값은 $f\left(\dfrac{2a+2}{3}\right)=-\dfrac{8}{27}(a-2)^3+1=9$이고 $a=-1$입니다.



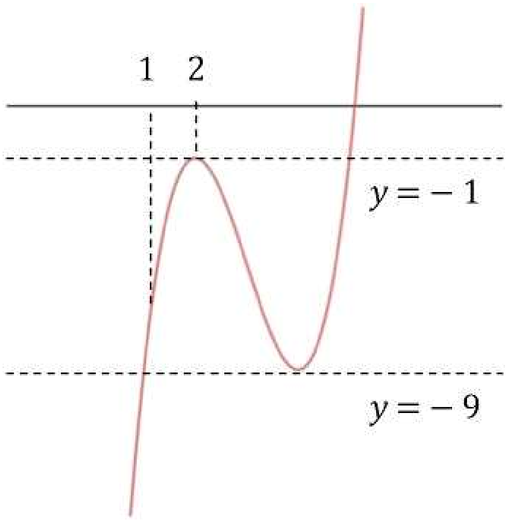
이렇게 되는 거죠? 이러면 $f(1)>0$이고 $f'(1)<0$이니까 조건 만족하네요!

그냥 여기까지만 해도 되겠는데요? 하지만 나머지는 왜 안 되는지 확인해봅시다.

3-2) 극솟값이 -9, 극댓값이 -1일 때

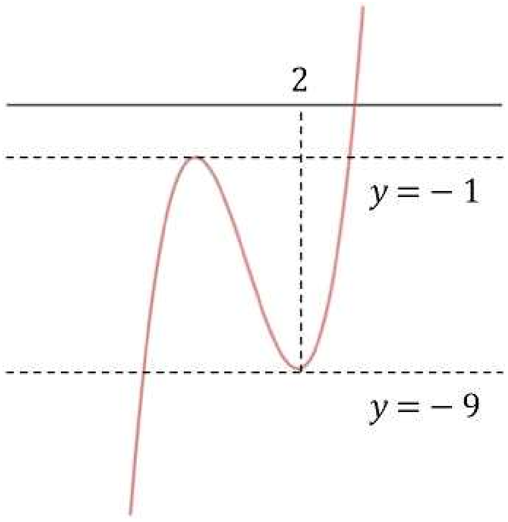
이거도 역시 케이스가 나뉘네요.

3-2-1) $x=2$에서 극대일 때



이렇게 되는데 $f(1)>0$도 아니고, $f'(1)<0$도 아니네요.

3-1-2) $x=2$에서 극소일 때



이렇게 되는데 이러면 어느 부분에 $x=1$이 있어도 $f(1)>0$이 성립하지 않습니다.

아무튼 $f(x)=2(x-2)^2(x+1)+1$이고 $f(1)=5$입니다. 답은 ①번이네요.

+코멘트!

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert a_n \rvert a_{n+1} = a_{n+1}$
(나) $a_n \times a_{n+2} \leq 0$

$a_n = n^2$를 만족시키는 자연수 n의 개수가 1이고 $a_3 = 1$, $a_6 = 0$일 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값은? [4점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

참고문항!(답은 맨 아래에 있어요!)

위부터 2021학년도 9월 20번, 2021학년도 9월 21번

20. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \geq g(x)$
(나) $f(x) + g(x) = x^2 + 3x$
(다) $f(x)g(x) = (x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

21. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} 2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

답: ③ (2021학년도 9월 20번) ② (2021학년도 9월 21번)

21. 정답 ②

1) 조건해석, 자연수 보이면 숫자 넣기

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|a_{n+1}=a_{n+1}$이고 $a_n \times a_{n+2} \le 0$이랍니다.

일단 먼저 $|a_n|a_{n+1}=a_{n+1}$부터 볼게요. a_{n+1}을 넘기고 정리하면 $a_{n+1}(|a_n|-1)=0$이죠? 따라서 $a_{n+1}=0$이거나 $|a_n|=1$이어야 합니다. 절댓값을 풀면 $a_{n+1}=0$이거나 $a_n=-1$이거나 $a_n=1$이어야 한다는 거죠.

그리고 $a_n \times a_{n+2} \le 0$는 뭐... n번째 항의 값과 $n+2$번째 항의 값을 곱하면 0이거나 음수여야 한다는 거네요.

이건 나중에 봐야할 것 같아요.

아래에 $a_n=n^2$을 만족시키는 자연수 n이 1개 있고 $a_3=1$, $a_6=0$이랍니다.

어? 방금 $a_{n+1}=0$이거나 $a_n=-1$이거나 $a_n=1$이어야 한다고 했었잖아요. n에 숫자를 막 집어넣어볼까요?

$n=2$를 넣으면 $a_3=0$이거나 $a_2=-1$이거나 $a_2=1$이어야 합니다. 그런데 지금 a_3은 0이 아니라 1이잖아요?

그러면 무조건 a_2는 -1이거나 1이어야 합니다.

그런데 $n=1$을 넣으면 $a_2=0$이거나 $a_1=-1$이거나 $a_1=1$이어야 하죠. 방금 a_2는 -1이거나 1어야 한다고 했잖아요. 0은 아니니까 a_1 역시 마찬가지로 -1이거나 1이어야 하겠네요.

이번엔 위로도 올라가봅시다. $n=3$을 넣으면 $a_4=0$이거나 $a_3=-1$이거나 $a_3=1$이어야 합니다. 그런데 이미 $a_3=1$이네요. 그러면 a_4는 꼭 0이 아니어도 되겠어요. 이미 $a_4(|a_3|-1)=0$가 성립하잖아요. 이거는 둘 중 하나만 성립하면 나머지는 성립하든 아니든 상관없는 거니까요. 9평 20번에서도 나왔었잖아요.

그리고 $n=5$를 넣으면 $a_6=0$이거나 $a_5=-1$이거나 $a_5=1$이어야 하는데 이미 $a_6=0$이니까 이것도 마찬가지로 a_5는 반드시 -1 또는 1일 필요는 없습니다.

하지만 $n=4$를 넣으면 $a_5=0$이거나 $a_4=-1$이거나 $a_4=1$이어야 합니다. 둘 중 하나는 만족시켜야 해요. 이러면 케이스가 나뉘겠네요.

$n=6$을 넘어버리면 모든 항의 값이 0이 되어야 합니다. $a_7=0$이거나 $a_6=-1$이거나 $a_6=1$이어야 하는데 $a_6=0$이니까 $a_7=0$이구요, 나머지들도 마찬가지로 다 0이 됩니다.

뭐 아무튼 케이스를 나누기 전에 대략적으로 정리 좀 해봅시다.

1	1	1		0	0
-1	-1				
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1	1	1		0
-1	-1		-1		

2) 케이스 분류

2-1) $a_4=-1$이거나 $a_4=1$일 때

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1	1	1		0
-1	-1		-1		

일단 $a_3=1$인데 $a_n \times a_{n+2} \le 0$에 의하여 $a_1 \times a_3 \le 0$이니까 $a_1=-1$이어야죠? 곱해서 0이거나 음수가 되어야 하잖아요.

그리고 $a_n=n^2$을 만족시키는 자연수 n이 하나 있어야 합니다. 지금 표를 보면 대충 $n=5$에서 성립해야 할 것 같은 느낌이 들죠? $n=6$ 이후부터는 계속 0이니까 상관없구요. $a_1=-1$이니까 성립 안 하고 a_2, a_3, a_4는 아예 숫자가 벗어났잖아요.

그런데 $a_3=1$이고 $a_3 \times a_5 \le 0$이니까 a_5는 0 또는 음수가 나와야 하지 않나요? $a_n=n^2$가 성립하는 자연수 n이 없네요.

2-2) $a_5=0$일 때

1	1	1		0	0
-1	-1				
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

아까랑 마찬가지로 $a_1=-1$입니다. 그리고 $a_n=n^2$을 만족시키는 자연수 n이 하나 있어야 하는데 표를 보면 관련 있는 건 $n=4$뿐이네요. $a_1=-1$이고, a_5부터는 계속 0이고, a_2와 a_3는 아예 숫자가 관련이 없구요.

$a_4=16$입니다.

그리고 $a_2 \times a_4 \le 0$이어야 하죠? $a_2=-1$입니다.

결국

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
-1	-1	1	16	0	0

이렇게 되어야 하겠네요. $\sum_{n=1}^{5} a_n = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=15$입니다. 답은 ②번이네요.

+코멘트!

9평 20번에는 곱이 0이 될 때 둘 중 하나만 0이 되면 되는 논리가 쓰였구요. 21번에는 수열에서 앞으로 가는 것뿐만 아니라 뒤로 가는 논리가 쓰였어요. 이거 두 개를 재밌게 섞어봤습니다. 20번에서 굉장히 많은 분들이

하나가 성립하면 쭉 그것만 성립해야 한다고 착각을 하시는 것 같은데요, 언제든지 둘 중 하나만 성립하면 됩니다. 물론 조건에 맞게 성립해야 하겠지만요. 앞으로는 “또는”에 주의하여 하나만 성립하면 되는 것으로 생각하면 될 것 같아요!

그리고 수열에서 앞으로 가는 문제는 많이 봤었지만 뒤로 가는 수열은 처음인 분들이 많으실 것 같은데, 걱정할 것 없습니다. 케이스 분류만 천천히 하시고 다 경우 나누면서 가면 계산은 의외로 얼마 안 걸립니다. 원래 이런 건 “어어ㅓ어 어떻게 해야 하지? 어떡하지?”이런 생각을 하면서 시간을 낭비하게 되거든요.

22. 정답 30

1) 문제해석

${}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_4$의 값을 구하랍니다. 물론 다 계산해도 되겠죠?

하지만 양쪽에 ${}_5\mathrm{C}_0$과 ${}_5\mathrm{C}_5$를 더해주고 2를 빼주면 ${}_5\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_5-2=2^5-2=30$이 됩니다.

원래 의도는 이거였는데 그냥 계산이 더 빠르겠네요.

23. 정답 3

1) 문제해석

$\int_0^1 f'(x)dx=2$, $f(0)=1$랍니다. 저거 미적분의 기본정리에 의하여 $\int_0^1 f'(x)dx=[f(x)]_0^1=f(1)-f(0)=2$가 됩니다. 그런데 $f(0)=1$이니까 $f(1)=3$이겠네요.

24. 정답 12

1) 등차수열 $a_n=a+(n-1)d$ (a는 첫항, d는 공차)로 놓기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2인데 $(2,\ a_1)$, $(3,\ a_5)$를 지나는 직선이 $(1,\ 0)$을 지난답니다. 일단

$a_n=2(n-1)+a=2n+a-2$로 잡을게요.

결국 어떤 직선이 동시에 $(1,\ 0)$, $(2,\ a_1)$, $(3,\ a_5)$를 지나야 하는 거잖아요. 직선을 생각해보면 사실상 x값이 일정하게 증가하니까 0, a_1, a_5도 일정하게 증가해야 하는 것 아닌가요? 그러니까 0, a_1, a_5가 등차수열을 이룬다는 거죠. $0+a+8=2a$이고 $a=8$입니다.

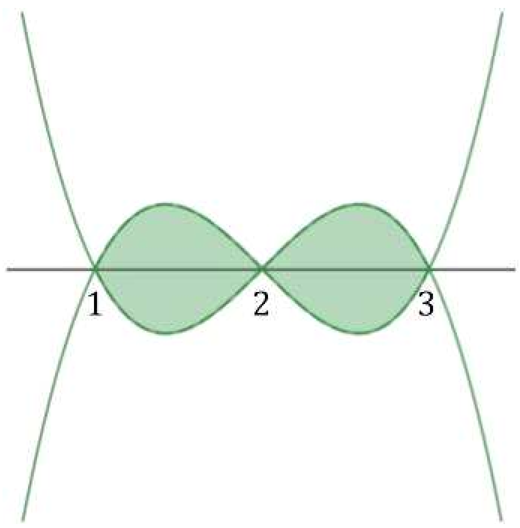
뭐 이렇게 안 해도 $(1,\ 0)$, $(2,\ a_1)$을 지나는 직선의 기울기가 $(2,\ a_1)$, $(3,\ a_5)$를 지나는 직선의 기울기와 같다고 해도 됩니다. 그러니까 $\frac{a-0}{2-1}=\frac{8}{3-2}$이고 $a=8$이 되는 거죠. 뭘로 하든 상관없을 것 같아요.

아무튼 $a_n=2n+6$이고 $a_3=12$입니다.

25. 정답 1

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$가 있는데 $f(x)$와 $f(4-x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하랍니다. 그냥 $f(x)$에 x 대신 $4-x$를 넣어서 $f(4-x)=-(x-1)(x-2)(x-3)$으로 만들어도 됩니다. 그런데 $f(x)$와 $f(4-x)$는 서로 $x=2$축 대칭 관계에 있잖아요? 그걸 이용해서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$를 먼저 그리고 대칭시켜서 $f(4-x)$를 그려도 됩니다. 뭐 아무튼 그려보면



이렇게 됩니다.

2) 정적분 관찰

저거 근데 잘 보면 $f(x)$와 $f(4-x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 사실상 $4\int_1^2 f(x)dx$와 같은 것 아닌가요? 왜냐면 $f(4-x)=-(x-1)(x-2)(x-3)$는 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$에 $(-)$만 곱한 거니까 $f(x)$와 $f(4-x)$는 $x=2$축 대칭이기도 하지만 x축 대칭이기도 하잖아요. 거기에 $f(x)$는 x축과 만나는 점의 간격이 모두 같으니까 중점인 점 $(2,\ 0)$ 대칭이구요.

그런데 $\int_1^2 \{(x-1)(x-2)(x-3)\}dx$는 사실상 $\int_{-1}^0 \{x(x-1)(x+1)\}dx$와 같습니다. 단지 평행이동만 했을 뿐이잖아요?

그리고 $\int_{-1}^0 \{x(x-1)(x+1)\}dx$는 $-\int_0^1 \{x(x-1)(x+1)\}dx$와 같습니다. x^3-x는 기함수니까요. 그래프 그려서 확인해보세요. 계산해보면 $-\int_0^1 (x^3-x)dx=-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{4}$입니다. 여기에 4를 곱하면 $f(x)$와 $f(4-x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이네요.

26. 정답 16

1) 그림 있으면 그림 보면서, 조건부확률 A일 때 B일 확률 $= \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{A\text{이고 }B\text{일 경우의수}}{A\text{일 경우의수}}$

흰 공 1개, 검은 공 3개, 빨간 공 4개가 있는데 여기서 3개 공을 꺼낸답니다. 이때 꺼낸 공의 색의 종류가 2개일 때 흰 공이 포함되어 있을 확률을 구하라네요. 구하는 확률은 $\dfrac{\text{흰 공 있음}}{\text{색 2개}}$입니다.

일단 분모부터 구해봅시다. 색의 종류가 2개이려면 가능한 경우는 흰검, 흰빨, 검빨이네요.

일단 흰검 같은 경우에는 흰 공이 하나밖에 없으니까 흰 공 1개와 검은 공 2개를 뽑아야겠어요. 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$입니다.

흰빨도 흰 공이 하나밖에 없으니까 흰 공 1개와 빨간 공 2개를 뽑아야겠어요. 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$입니다.

검빨은 약간 다르네요. 둘 다 적어도 하나씩은 있어야 하는데 검은 공 1개, 빨간 공 2개일 수도 있고, 검은 공 2개, 빨간 공 1개일 수도 있어요.

검은 공 1개, 빨간 공 2개인 경우의 수는 ${}_3C_1 \times {}_4C_2 = 18$이구요, 검은 공 2개, 빨간 공 1개인 경우의 수는 ${}_3C_2 \times {}_4C_1 = 12$입니다. 분모는 $3+6+18+12 = 39$이네요.

여기서 흰 공이 포함되어 있는 경우는 흰검, 흰빨이죠? 경우의 수는 $3+6=9$이네요. 따라서 구하는 확률은 $\dfrac{9}{39} = \dfrac{3}{13}$입니다. $p = 13$, $q = 3$이고 $p+q = 16$이네요.

27. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $a_{11}+a_{12}$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\sum_{k=1}^{2n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{2k-1} + 2^{n+1}$

(나) $\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} + 2n$

참고문항!(답은 맨 아래에 있어요!)

2021학년도 6월 28번

28. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k-3}{a_k} = 2n^2 + 7n$$

을 만족시킨다. $a_5 \times a_7 \times a_9 = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

답: 58 (2021학년도 6월 28번)

27. 정답 66

1) 시그마 펼치기

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{2n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{2k-1} + 2^{n+1}$이고 $\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} + 2n$이라고 합니다. 일단 펼쳐볼게요. $\sum_{k=1}^{2n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{2k-1} + 2^{n+1}$를 펼치면 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n+1} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1} + 2^{n+1}$가 되구요, $\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} + 2n$를 펼치면 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = a_2 + \cdots + a_{2n} + 2n$이 됩니다.

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n+1} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1} + 2^{n+1}$의 양변에 같은 것이 있네요? 우변에 있는 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}$을 왼쪽으로 넘겨서 정리해볼까요? 그러면 $a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = 2^{n+1}$이 됩니다. 짝수항만 순서대로 n개를 더하면 2^{n+1}이 되네요!

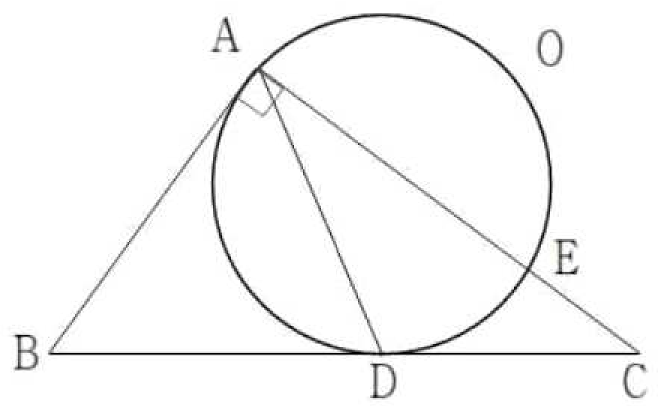
그리고 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = a_2 + \cdots + a_{2n} + 2n$도 마찬가지로 우변에 있는 $a_2 + \cdots + a_{2n}$을 왼쪽으로 넘기면 $a_1 + a_3 + \cdots\ a_{2n-1} = 2n$이 됩니다. 이번엔 홀수항만 순서대로 n개를 더하면 $2n$이 되네요. 이거 그냥 합치면 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 2n + 2^{n+1}$가 되는 것 아닌가요? 그러니까 $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 2n + 2^{n+1}$이 되는 거죠.

이제 $a_{11} + a_{12}$를 구해야 합니다. 우리가 아는 건 n이 증가할 때마다 더하는 항이 두 개씩 늘어나는 $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 2n + 2^{n+1}$이구요. 그러면 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} + a_{11} + a_{12}$에서 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$을 빼면 되는 것 아닌가요? 그러니까 $\sum_{k=1}^{12} a_k = 12 + 2^7$에서 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 10 + 2^6$을 빼는 거죠. 따라서 $a_{11} + a_{12} = 2 + 2^6 = 66$입니다.

+코멘트!

6평 28번에는 시그마 펼치기와 $S_n - S_{n-1} = a_n$을 이용해 특정 값을 구하는 문제가 나왔었어요! 일단 먼저 시그마를 펼친 후 예쁘게 식을 정리한 다음 $S_n - S_{n-1} = a_n$을 이용해 값을 구하는 걸 잊지 맙시다!

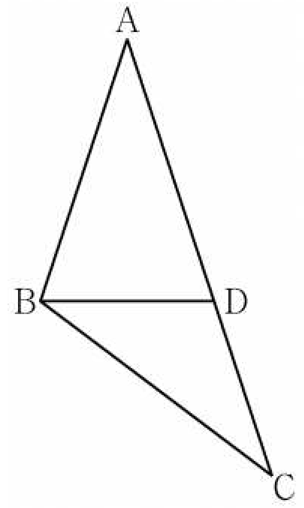
28. 직각삼각형 ABC에 대하여 이 삼각형과 점 A, 선분 BC 위의 점 D에서 각각 접하는 원 O을 그리고, 원 O와 선분 AC가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 하자. 원 O가 선분 AE를 지름으로 하고, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{BD}}=3$일 때, 삼각형 ADE의 넓이는 S이다. $5S^2$의 값을 구하시오. [4점]



참고문항!(답은 맨 아래에 있어요!)

2021학년도 9월 25번

25. $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$가 되도록 잡는다. $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [3점]

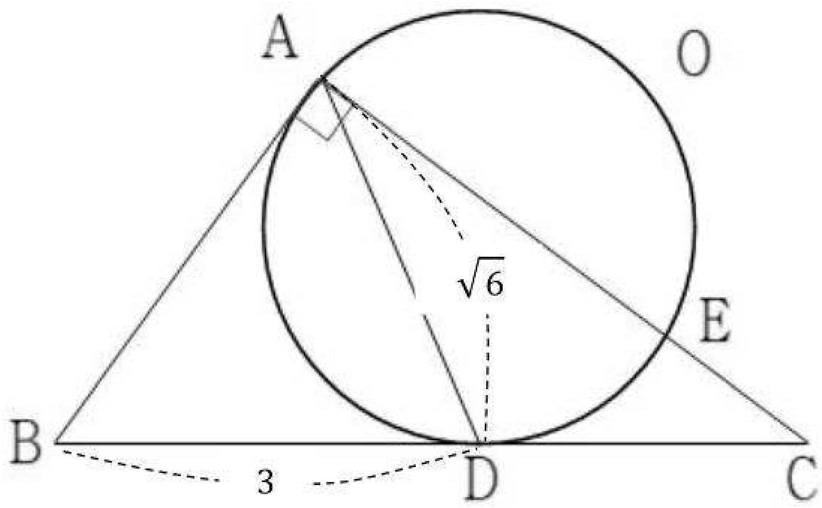


답: 41 (2021학년도 9월 25번)

28. 정답 9

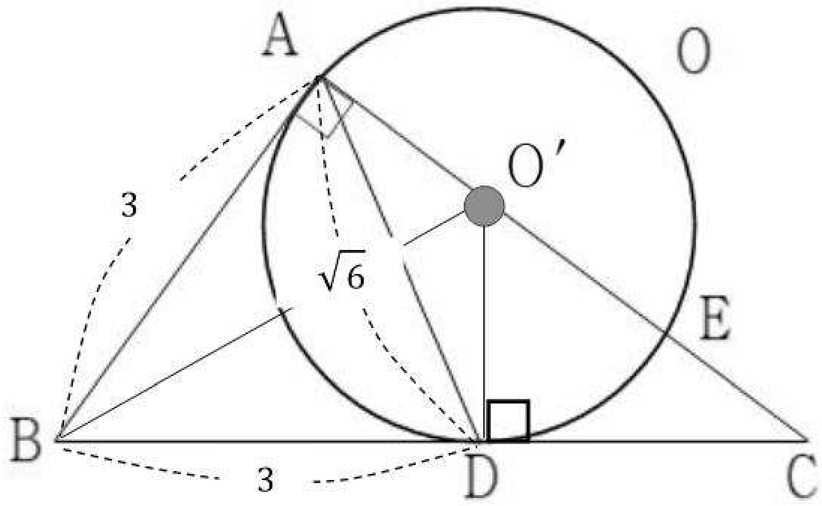
1) 그림 있으면 그림 보면서

일단 다 표시 좀 해둡시다.

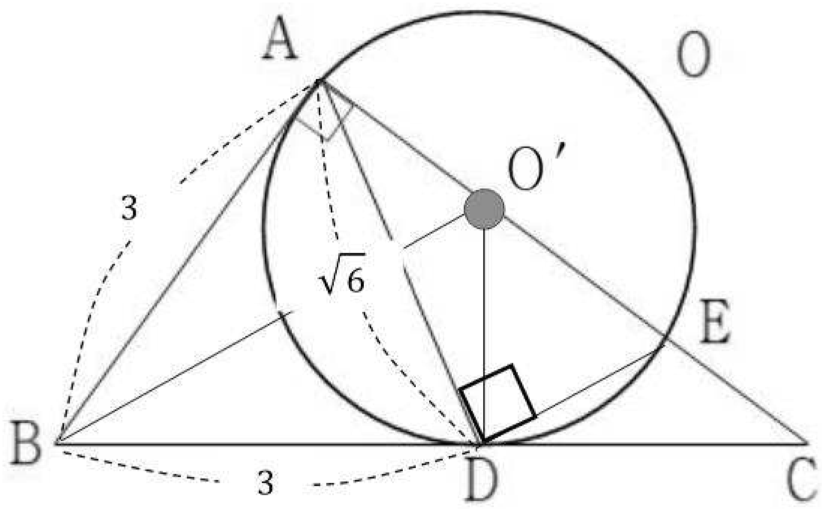


이렇게 말이죠.

그리고 지금 원 O 위의 점 A에서의 접선이 선분 AB이고 원 O 위의 점 D에서의 접선이 선분 BD이잖아요.
그러면 원의 중심과 접하는 점을 잇고 수직표시 해줘야죠. 각의 이등분선도 그려주구요. 원의 중심을 O′이라 하면



이렇게 되죠? 삼각형 O′BD와 O′AB는 선분 BO′를 공유하고, 직각을 가지고 있고, 두 삼각형 모두 한 변의 길이가 원의 반지름과 같으므로 합동입니다. 따라서 선분 AB의 길이와 선분 BD의 길이는 같아야 하겠네요.
또한 원 O의 지름이 선분 AE인데 선분 AE를 한 변으로 하는 원에 내접하는 삼각형이 있네요? ADE 말이에요. 그러면



이렇게도 표시 해줘야죠?

어? 우리가 구해야 하는 건 삼각형 ADE의 넓이인데 높이가 $\sqrt{6}$으로 주어졌네요. 그럼 결국 우리는 $\overline{DE}$만 구하면

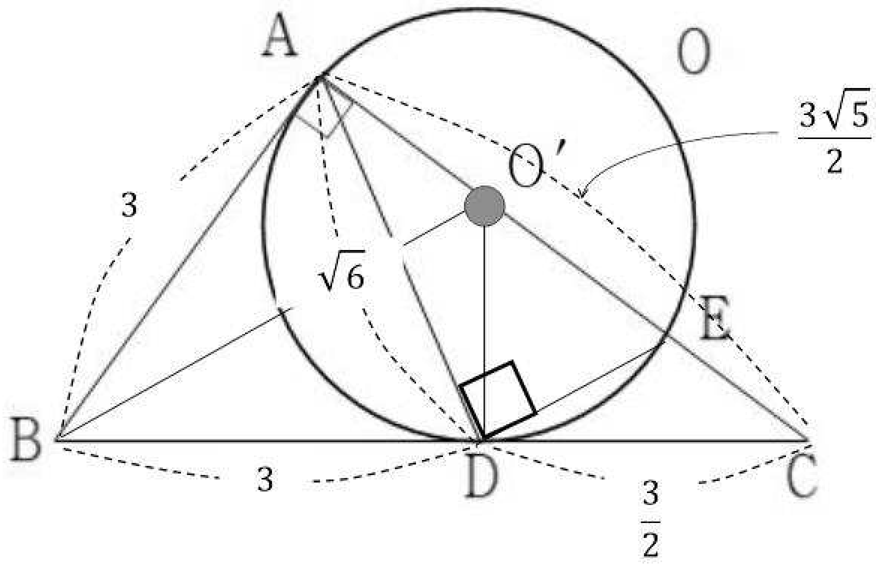
되겠어요.

2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 세 변의 길이

그런데 이러면 정해진 삼각형이 있네요. ABD는 세 변의 길이가 모두 나와 있어요. 이러면 코사인법칙을 통해 나머지 각을 알 수 있죠? $\angle \mathrm{ABC} = \theta$라 하면 $\cos\theta = \dfrac{3^2 + 3^2 - \sqrt{6^2}}{2 \times 3 \times 3} = \dfrac{2}{3}$입니다.

그런데 이거 삼각형 ABC에도 적용할 수 있죠? $\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \dfrac{3}{\overline{\mathrm{BC}}} = \dfrac{2}{3}$이고 $\overline{\mathrm{BC}} = \dfrac{9}{2}$입니다. 그러면 $\overline{\mathrm{DC}} = \dfrac{3}{2}$이네요.

ABC는 직각삼각형이니까 피타고라스를 사용하면 $3^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \left(\dfrac{9}{2}\right)^2$이고 $\overline{\mathrm{CA}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$가 됩니다.



이렇게 되는 거죠.

그리고 $\angle \mathrm{BCA} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$이잖아요? $\cos\theta$를 알면 $\dfrac{\pi}{2} - \theta$을 사용해서 추가적으로 알 수 있는 것이 있죠.

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$는 $y > 0$인 y축이니까 sin을 cos으로 바꾸고, 예각인 θ만큼 반시계방향으로 돌리면 사인값은 양수니까 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$으로 바뀌잖아요? 따라서 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{2}{3}$입니다.

이러면 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{2}{3}$을 이용해서 삼각형 O′DC에 대하여 정리할 수 있죠. $\overline{\mathrm{O'D}}$는 원 O의 반지름인 r이니까 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{\overline{\mathrm{O'D}}}{\overline{\mathrm{CO'}}} = \dfrac{r}{\overline{\mathrm{CO'}}} = \dfrac{2}{3}$이고 $\overline{\mathrm{CO'}} = \dfrac{3}{2}r$입니다.

그럼 여기도 피타고라스를 사용해야겠네요. $r^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}r\right)^2$이고 $r^2 = \dfrac{9}{5}$입니다.

그리고 삼각형 ADE도 직각삼각형이니까 피타고라스를 사용할 수 있겠네요. $\overline{\mathrm{AE}} = 2r$이니까 $\sqrt{6^2} + \overline{\mathrm{DE}}^2 = (2r)^2$이고 $\overline{\mathrm{DE}} = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$입니다.

이제 넓이를 구하면 되겠네요. $S = \dfrac{1}{2} \times ($높이 $\sqrt{6}) \times ($밑변 $\dfrac{\sqrt{30}}{5}) = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$입니다. 따라서 $5S^2 = 9$이네요.

+코멘트!

9평 25번에서는 삼각형의 세 변의 길이를 알 때 코사인법칙을 통해 한 각(코사인값)을 구하고 그 각을 더 큰 삼각형에 적용해야 했었어요. 삼각형에서 세 변의 길이가 주어지면 나머지 각들을 코사인법칙을 통해 구할 수 있다는 걸 명심하세요!

29. 흰 공 5개와 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 검은 공 5개가 있다. 이 10개의 공 중에서 7개를 골라 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 각 학생이 받은 검은 공에 적힌 모든 숫자의 합이 6이 되도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 흰 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 하나도 받지 못하는 학생은 없다.) [4점]

참고문항!(답은 맨 아래에 있어요!)

위부터 2021학년도 6월 가형 29번, 2020년 7월 29번, 2021학년도 9월 29번

29. 검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 4자루가 있다. 이 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

29. 흰 공 2개, 빨간 공 3개, 검은 공 3개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 흰 공을 받은 학생은 빨간 공과 검은 공도 반드시 각각 1개 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않고, 공을 하나도 받지 못하는 학생은 없다.) [4점]

29. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

답: 114 (2021학년도 6월 가형 29번) 72 (2020년 7월 29번) 168 (2021학년도 9월 29번)

29. 정답 528

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

흰 공 5개와 1, 2, 3, 4, 5가 적힌 검은 공 5개가 있는데 이 중 7개를 골라 3명의 학생에게 남김없이 나눠준다고 합니다! 그때 각 학생이 받은 검은 공에 적힌 모든 숫자의 합이 6이 되는 경우의 수를 구하라고 하네요. 그리고 흰 공은 구별불가능하고 모두가 적어도 하나의 공은 받아야 한답니다.

10개 중에 공을 7개 고르니까 ${}_{10}C_7$이다!

라고 생각하셨나요? 서로 다른 것은 그게 가능하지만 서로 같은 것이라면 이야기가 달라집니다. 모두 같은 흰 공 5개 중에 3개를 고를 때 경우의 수를 ${}_5C_3$이라고 하시나요? 아니죠?

그러면 어떡하죠? 뭘 어떡해요. 다 기준 잡고 분류해야죠.

일단 3명의 학생이 받은 검은 공에 적힌 모든 숫자의 합이 6이 되어야 합니다. 이게 되려면 $1+2+3$이거나 $1+5$이거나 $2+4$이어야 합니다.

만약 숫자 1, 2, 3이 적힌 검은 공을 고른다면 자동적으로 흰 공은 4개를 골라야 해요. 7개를 채워야 하잖아요.

$1+5$와 $2+4$는 흰 공 5개를 고르면 되겠네요.

케이스가 나뉘는 것 같아요. 케이스 분류하고 가봅시다.

2) 케이스 분류

2-1) 검은 공 1, 2, 3일 때

이제 검은 공 1, 2, 3과 흰 공 4개를 3명의 학생에게 나눠줘야 해요. 이것도 중복조합을 사용해서 ${}_3H_7$이다!

라고 할 수가 없어요. 중복조합을 사용하려면 서로 다른 상자에 같은 공을 넣는 구조여야 하거든요. 그런데 지금은 다른 공이 있잖아요.

그러니까 따로따로 넣어야 한다는 거에요. 일단 다른 공을 먼저 넣어봅시다.

다른 공을 다른 상자에 넣는 거니까 물어보면 되겠네요. 검은 공보고 물어보세요! 어느 학생에게 갈래? 그럼 3가지 대답이 가능합니다. 나머지 공들에게도 물어보면 경우의 수는 3^3이다!

라고 할 수도 없습니다. 왜냐면 다른 공과 같은 공을 따로따로 학생에게 주는데 각 학생은 적어도 하나의 공은 받아야 하거든요. 다른 공을 기준을 나누지 않고 줘버리면 각 학생이 몇 개의 공을 가지고 있는지 모르잖아요.

그럼 흰 공은 어떻게 넣어야 하죠? 그걸 해결할 수가 없어요.

그러니까 이것도 기준 잡고 분류해야 합니다. 검은 공을 주는 경우는 한 사람에게 3개 다 주는 경우, 한 사람에게 2개, 다른 한 사람 1개를 주는 경우, 세 사람에게 1개씩 주는 경우가 있겠네요.

2-1-1) 한 학생에게 3개 다 줄 때

일단 그 한 사람을 정해야 해요. 이거는 사실상 $0+0+3$을 배열하는 거니까 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$입니다. 이제 흰 공을 줘야 하는데 검은 공을 받지 못한 두 사람에게는 흰 공을 미리 하나씩 주고 시작해야 해요. 그러면 흰 공

2개가 남죠. 그걸 세 사람에게 주면 됩니다. 이거는 서로 다른 상자에 같은 공을 넣는 구조니까 중복조합을 사용할 수 있어요. 따라서 선택종류 3가지에 선택횟수 2번으로 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$입니다. 총 경우의 수는 $3 \times 6 = 18$입니다.

2-1-2) 한 학생에게 2개, 다른 한 학생에게 1개 줄 때

이번에는 2개 받을 사람에게 1, 2, 3이 적힌 공 중 어느 것을 줄지도 정해야 하잖아요. 그럼 자동적으로 남은 하나는 1개 받을 사람에게 가니까요. 따라서 ${}_3C_2 = 3$입니다.

그리고 각 공을 받을 사람을 정해야 해요. 그러면 $0+1+2$를 배열하는 것과 같으니까 $3! = 6$입니다.

검은 공을 다 줬으니 흰 공을 줘야겠네요. 아직 하나도 받지 못한 사람이 있으니까 그 사람에게는 미리 흰 공을 하나 주고, 남은 3개를 주면 되겠어요. 선택종류 3가지에 선택횟수 3번으로 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$입니다. 총 경우의 수는 $3 \times 6 \times 10 = 180$이네요.

2-1-3) 세 학생에게 각각 1개씩 줄 때

세 명의 학생에게 1개씩 공을 줘야 하니까 각 학생에게 어느 공을 줄지를 정해야 해요. ${}_3C_1 \times {}_2C_1 = 6$입니다.

그런데 세 명의 학생이 받는 공은 $1+1+1$로 세 번 겹치잖아요? $\frac{1}{3!}$으로 나눠줍니다.

그리고 각 공을 받을 사람을 정해야 합니다. 지금 우리는 $\frac{1}{3!}$으로 나눠줬으니까 $1+1+1$은 모두 구별이 가능해요.

다시 말하면 그냥 $3! = 6$으로 배열만 하면 된다는 거죠.

이렇게 검은 공을 주면 이제 흰 공만 주면 됩니다. 이제는 미리 줄 필요가 없죠. 모두가 하나씩은 가지고 있으니까요. 따라서 선택종류 3가지, 선택횟수 4번으로 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$입니다. 총 경우의 수는 $6 \times 15 = 90$입니다.

2-2) 검은 공 1, 5일 때

이거도 경우를 나눠볼게요. 한 사람이 두 개를 받는 경우, 두 사람이 하나씩 받는 경우가 있겠네요.

2-2-1) 한 학생에게 2개 줄 때

사람을 정해야겠죠? 이거는 $0+0+2$를 배열하는 거니까 $\frac{3!}{2!} = 3$입니다.

그리고 흰 공을 주면 되겠네요. 두 사람은 아직 공이 없으니까 미리 한 개씩 주구요, 3명의 학생에게 3개의 같은 공을 주면 됩니다. 선택종류 3가지, 선택횟수 3번으로 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$입니다. 총 경우의 수는 $3 \times 10 = 30$이네요.

2-2-2) 두 학생에게 각각 1개씩 줄 때

일단 각 학생이 어떤 공을 가질지 정해야 해요. ${}_2C_1 \times {}_1C_1 = 2$입니다. 그런데 $0+1+1$으로 두 번 겹치니까 $\frac{1}{2!}$으로 나눠줘야겠죠.

그리고 어떤 학생이 공을 가질지도 정해야 합니다. 이거는 $0+1+1$을 배열하는 것과 같은데 이미 우리는 위에서 나눠줬으니까 $0+1+1$은 모두 구별 가능합니다. 경우의 수는 $3!=6$입니다.
그리고 이제 흰 공을 주면 되겠네요. 아직 공을 받지 못한 한 사람에게 공을 미리 주면 남은 흰 공은 4개입니다. 선택종류 3가지, 선택횟수 4번으로 ${}_3H_4={}_6C_4=15$이네요. 총 경우의 수는 $6\times15=90$입니다.

2-3) 검은 공 2, 4일 때

어? 그런데 이거 사실상 2-2)와 같은 경우 아닌가요? 경우는 2개를 받을 때, 1개, 1개를 받을 때로 똑같고 흰 공의 개수도 같으니까요. 그냥 2-2)에 나왔던 거 사용하면 되겠네요. $30+90=120$입니다.
따라서 구하는 경우의 수는 $18+180+90+120+120=528$입니다.

+코멘트!

6평과 7평, 9평에서 전년도의 확통과 확연히 달라진 점이 보입니다. 예전에는 흰 공과 검은 공을 독립적으로 사용하는 느낌이었다면 올해의 확통은 서로 유기적으로 연결되는 조건들을 출제하고 있어요.
또한 우리의 통념을 깨버리는 문제들을 출제하고 있습니다. 선택했다고 해서 반드시 조합을 사용하는 것도 아니고, 익숙한 중복조합 문항이라고 해도 함부로 중복조합을 사용할 수 없게 만들었어요. 왜냐면 이 둘은 개수까지 제어하지는 못하거든요.
이런 상황에서 가장 중요한 건 역시 케이스 분류입니다. 사실 우리에게 익숙한 중복조합 문항들도 케이스 분류를 해서 풀 수도 있었어요. 단지 시간이 약간 더 오래 걸린다는 거죠. 하지만 지금과 같이 쉽사리 공식을 사용하지 못하게 하는 상황에서는 케이스 분류를 해서 문제에 접근할 생각을 해야 합니다!

30. 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고, 대칭축이 직선 $x=t$인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)| & (|g'(x)| \le |f(x)|) \\ |g'(x)| & (|g'(x)| > |f(x)|) \end{cases}$$

라 할 때, $f(x)$와 $h(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 x축과 $x=-1$에서만 만난다. (나) $h(x)$가 한 점에서만 미분불가능하도록 하는 모든 실수 t의 값은 $t=-1$, $t=a$이다. (단, $a \neq -1$)

$f(2)=3$일 때, $3a$의 값을 구하시오. [4점]

참고문항!(답은 맨 아래에 있어요!)

위부터 2021학년도 9월 18번, 2021학년도 9월 20번

18. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f'(x)| \le 4x^2+5$$

를 만족시킨다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$일 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

20. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \geq g(x)$
(나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$
(다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

답: ② (2021학년도 9월 18번) ③ (2021학년도 9월 20번)

30. 정답 13

1) 문제해석

일단 삼차함수 $f(x)$가 있구요, 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 대칭축이 $x=t$인 이차함수 $g(x)$가 있는데

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)| & (|g'(x)|\le |f(x)|) \\ |g'(x)| & (|g'(x)|>|f(x)|) \end{cases}$$ 랍니다.

일단 해석부터 해볼게요. $h(x)$는 $y=|f(x)|$가 $y=|g'(x)|$보다 크면 $y=|f(x)|$를 고르구요, $y=|f(x)|$가 $y=|g'(x)|$보다 작으면 $y=|g'(x)|$를 고르는 함수입니다. 다시 말하면 $h(x)$는 $y=|f(x)|$와 $y=|g'(x)|$ 중에 더 위에 있는 함수를 고르는 함수에요.

$f(x)$는 삼차함수고, $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 대칭축이 $x=t$이니까 $g(x)=\frac{1}{2}(x-t)^2+b$라 할 수 있겠죠? 이거 미분하면 $g'(x)=x-t$가 됩니다. 대칭축이 $x=t$인 이차함수를 미분하면 $(t,\ 0)$을 지나는 일차함수가 된다고 9평 18번에서 알 수 있었잖아요?

아무튼 여기에 절댓값을 씌우면 결국 $|g'(x)|=|x-t|$인데 이 함수는 점 $(t,\ 0)$을 지나고 V자 모양의 함수가 됩니다!

2) 조건해석

(가)조건에서 $f(x)$는 x축과 $x=-1$에서만 만난답니다. 일단 $f(-1)=0$이네요.

그리고 대애애충 머릿속으로 개형이 그려지죠? 일단 그림은 나중에 그려봅시다.

(나)조건에서 $h(x)$가 한 점에서만 미분불가능하도록 하는 모든 실수 t는 $t=-1$, $t=a$라고 하네요. 음...? 방금 $f(-1)=0$이라고 했었죠? 그리고 $t=-1$에서 한 점에서만 미분불가능하다면 $|g'(x)|=|x+1|$일 때잖아요.

이거도 $g(-1)=0$이네요? 음... 뭔가 수상해요. 의심해봐야겠어요.

그리고는 $f(2)=3$이랍니다. 어? 그런데 $|g'(x)|=|x+1|$는 점 $(2,\ 3)$을 지나잖아요!! 매우매우 수상해요!!

그리고 또 점 $(-1,\ 0)$과 $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3-0}{2-(-1)}=1$이네요? $g'(x)$의 기울기도 1이잖아요.

의심해볼만 하겠어요.

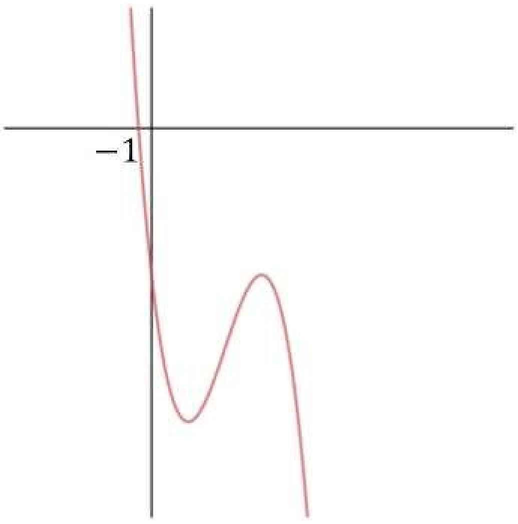
이거는 그림을 그려봐야겠네요.

일단 $f(x)$부터 그려야겠죠? 그래야 절댓값으로 씌워올린 후 $|g'(x)|=|x+1|$를 그리고 더 위에 있는 걸 선택해서 $h(x)$를 그릴 수 있으니까요.

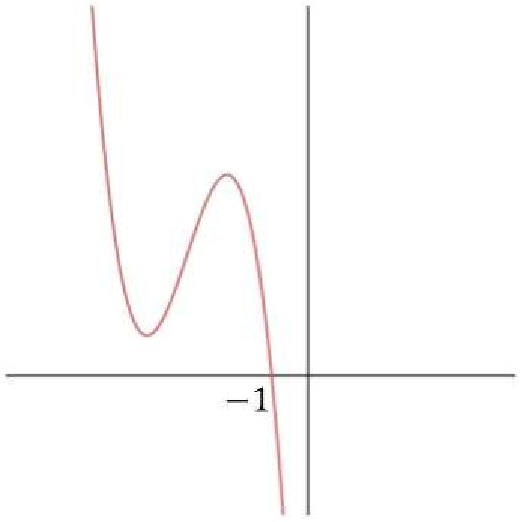
대충 그려봅시다.

3) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 절댓값 함수

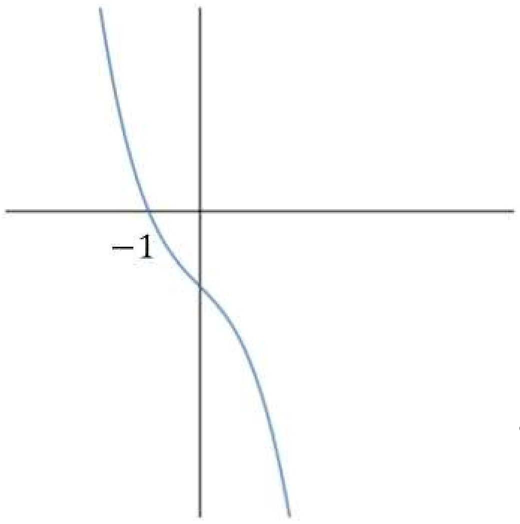
일단 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수면 될 수가 없습니다. 왜냐하면 $f(x)$가 x축과 $x=-1$에서만 만난다면



이렇게 되거나



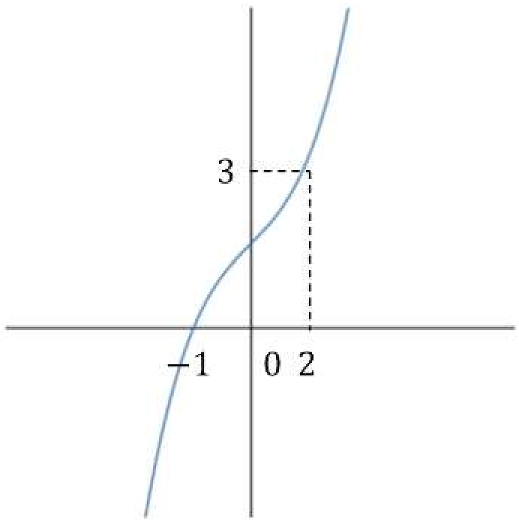
이렇게 되거나



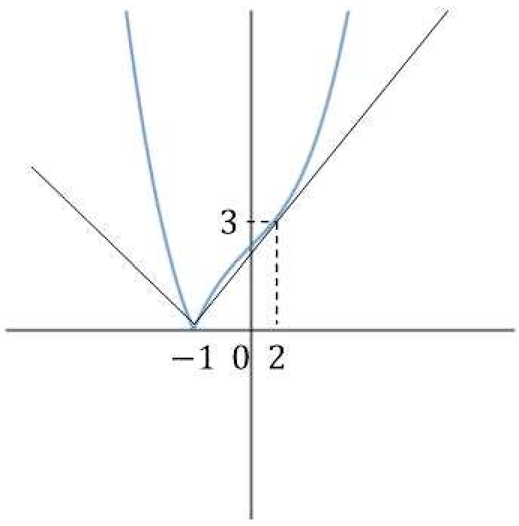
이렇게 된다는 건데 이러면 $f(2)=3$이 될 수 없잖아요.

일단 최고차항의 계수는 양수입니다.

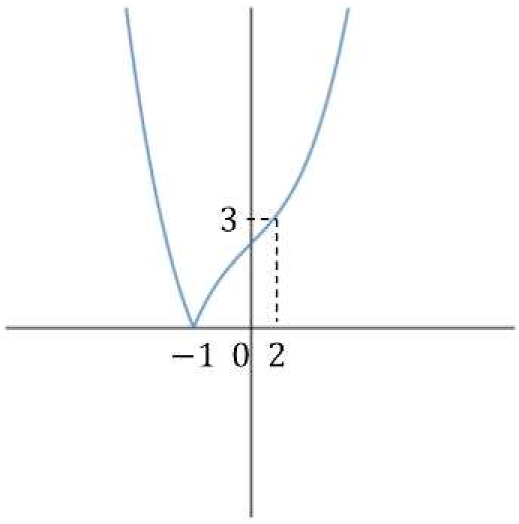
그러면



이렇게 할 수 있어요. 이러면 일단 절댓값으로 씌워 올리고 $h(x)$를 만들어볼게요.

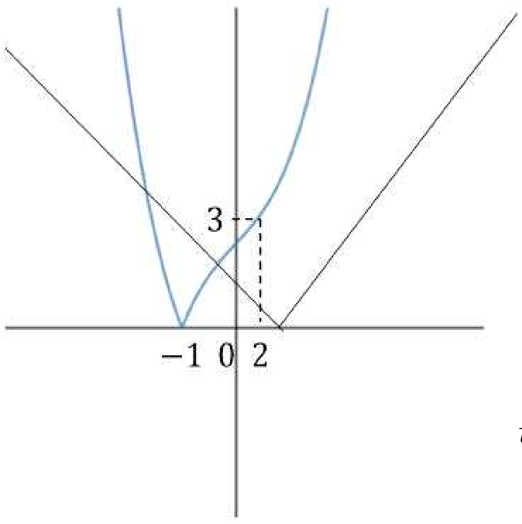


이렇게 설정해야 더 위에 있는 걸 선택한 $h(x)$가

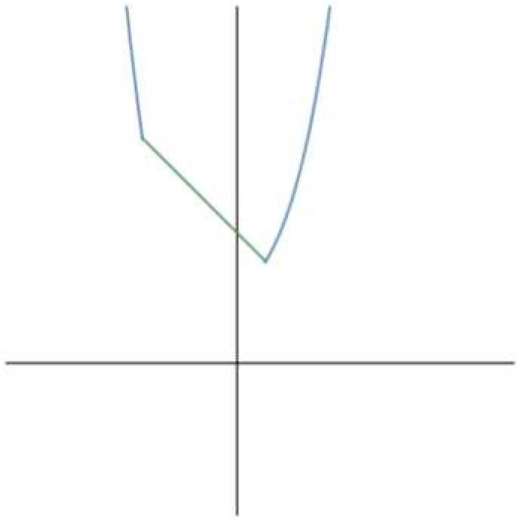


이렇게 됩니다. 이러면 한 점에서만 미분불가능하네요.

그런데 문제는 그게 끝이라는 거에요.

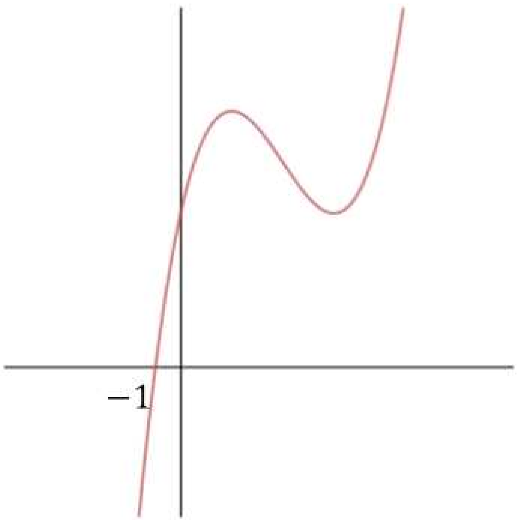


t를 움직여도



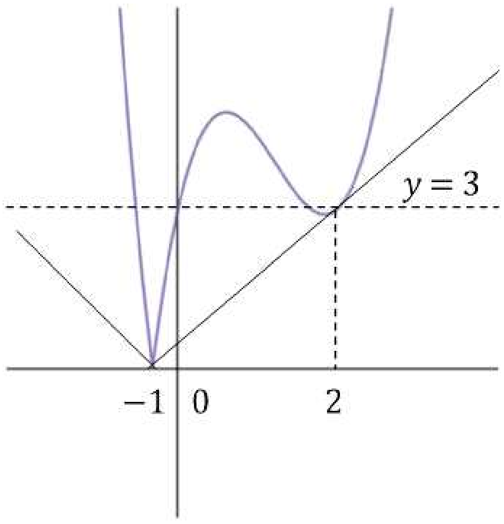
이렇게 두 점에서 미분불가능합니다.

결국 이 개형은 안 되겠네요.

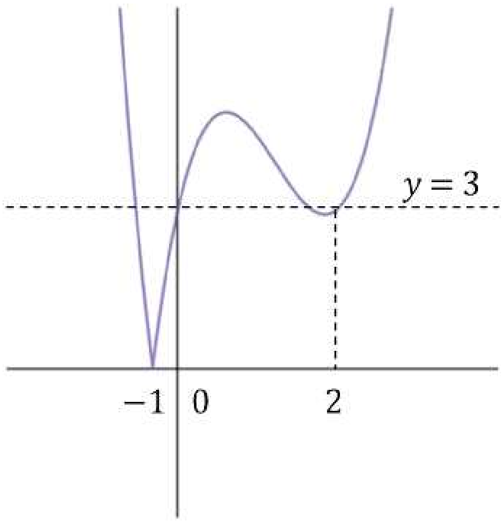


이런 모양이 되어야겠어요.

$f(2)=3$은 어디에 있어야 할까요? 일단 $f(-1)=0$이고 $f(2)=3$잖아요. 평균값 정리에 의해 $f'(c)=1$을 만족하는 $-1<c<2$인 c가 존재해야 합니다. 동시에 $f(x)$ 위의 점 $(-1,\ 0)$과 $(2,\ 3)$을 모두 지나면서 한 점에서만 미분불가능해야 해요. 방금 바로 위에서 한 번 해봤잖아요. 결국 접해야 합니다.

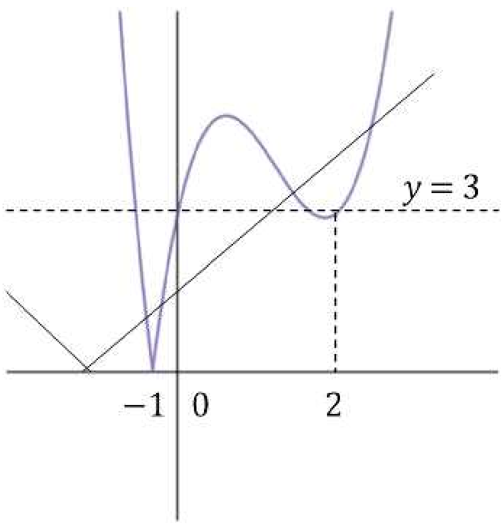


이렇게 말이죠. 이러면 $h(x)$는 계속 위에 있는 $f(x)$를 선택해

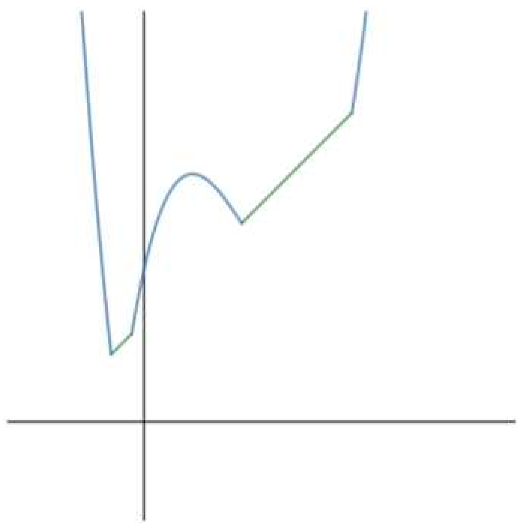


이렇게 되거든요. 한 점에서만 미분불가능합니다.

그리고 t를 왼쪽으로 움직이면?



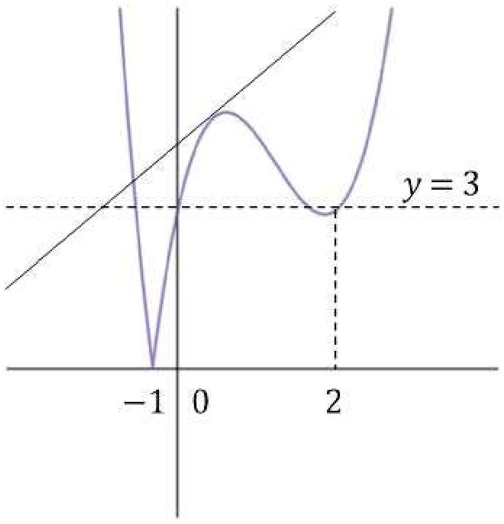
이렇게 되면



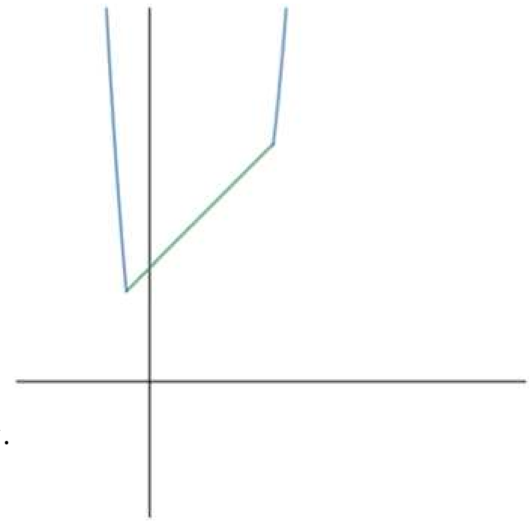
이렇게 4개의 점에서 미분불가능합니다.

지금 잘 보니까 접하는 거 아니면 만날 때마다 미분불가능하게 되네요.

조금 더 왼쪽으로 가도

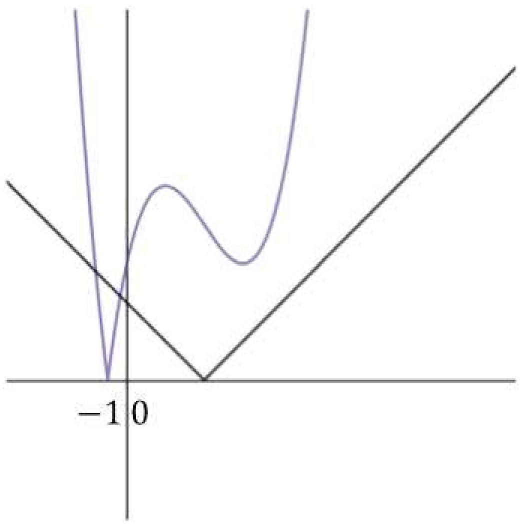


계속 2개의 점에서 미분불가능해집니다.

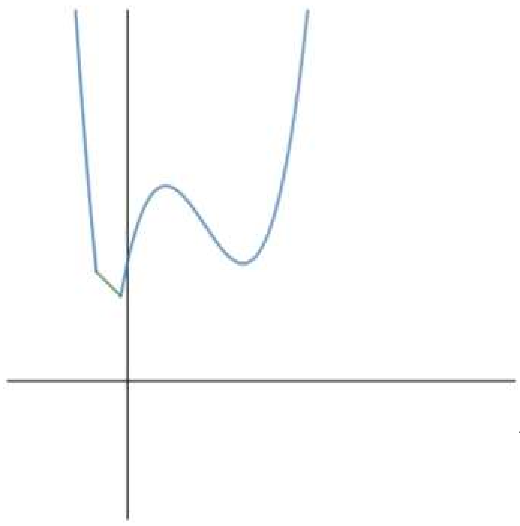


(그림은 좀 안 맞아도 이해해주세요 ㅎㅎ 대충 비슷하기만 하면 되는 거잖아요.)

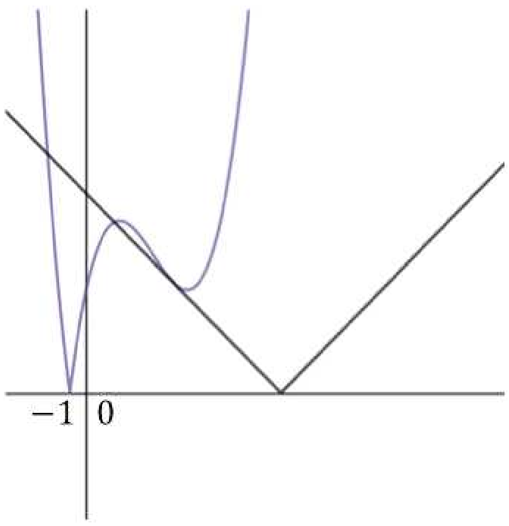
이제 t를 -1보다 오른쪽으로 움직여봅시다.



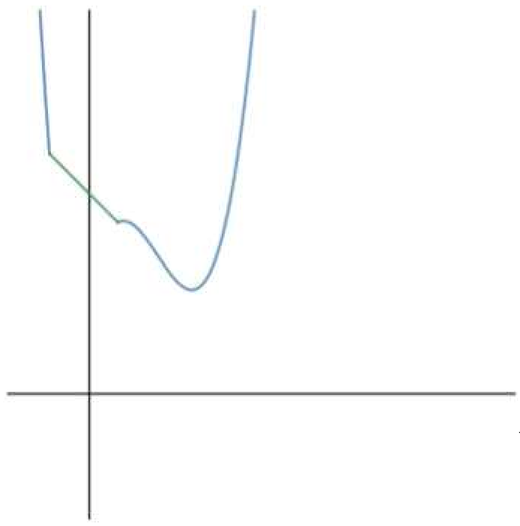
이렇게 하면



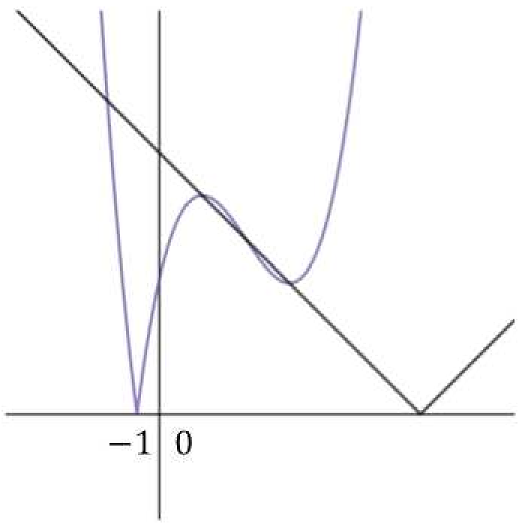
두 점에서 미분불가능하구요,



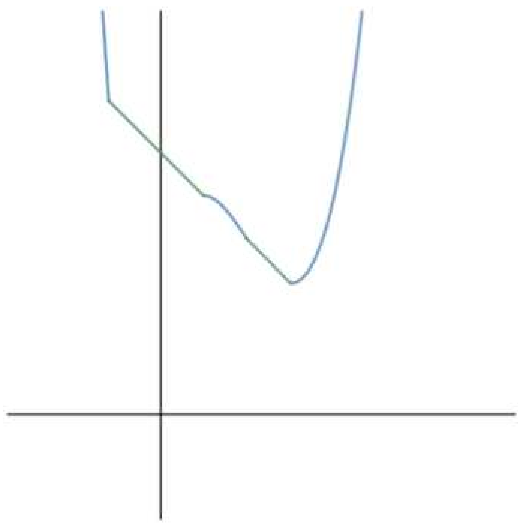
이렇게 해도



두 점에서 미분불가능합니다.



이렇게 하면

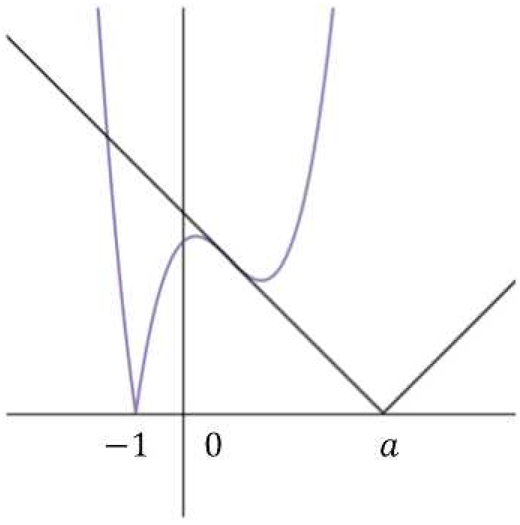


4개의 점에서 미분불가능하구요.

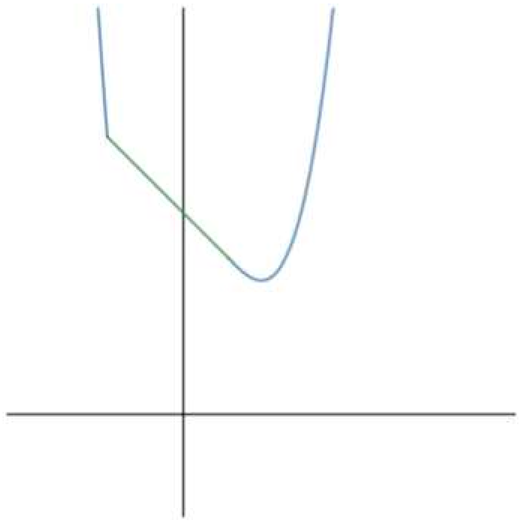
이거보다 더 위로 올라가도 계속 두 점에서 미분불가능합니다.

아니 그럼 어쩌란 거죠?

잘 생각해보세요. 방법이 하나 있잖아요.



이렇게 접선의 기울기가 최소가 되는 점에서 접하면



$h(x)$가 이렇게 너무 매끄러운 함수가 됩니다. 이러면 한 점에서만 미분불가능하죠?

결국 접선의 기울기의 최소값은 -1이 되어야 하는 거에요.

4) 함수 구하기 - 차함수

일단 $y=f(x)$와 $y=x+1$은 $x=-1$에서 만나고 $x=2$에서 접해야 합니다. $f(x)$의 최고차항의 계수를 k라 하면 $f(x)-(x+1)=k(x+1)(x-2)^2$이구요, $f(x)=k(x+1)(x-2)^2+x+1$입니다.

이때 $f(x)$의 접선의 기울기의 최솟값이 -1이어야 하니까 미분해서 구해봅시다.

$f'(x)=k\left((x-2)^2+2(x+1)(x-2)\right)+1=k(3x(x-2))+1$이니까 $x=1$에서 최솟값을 갖네요. 따라서

$1-3k=-1$이고 $k=\dfrac{2}{3}$입니다.

우리는 a의 값을 구해야 하잖아요? 일단 접선을 구해야 해요. 기울기는 -1이고 $(1,\ f(1))$을 지나는 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 찾아야 합니다. $f(1)=\dfrac{10}{3}$이니까 $-x+\dfrac{13}{3}$이네요. $a=\dfrac{13}{3}$입니다. $3a=13$이네요.

+코멘트!

9평에 나왔던 18번의 "대칭축이 $x=1$"이라는 표현과 20번의 구간별로 나눠진 함수를 재밌게 엮어봤습니다.

이차함수의 대칭축이 $x=t$라는 표현은 결국 이차함수를 미분한 일차함수는 $(t,\ 0)$을 지난다는 걸 식을 설정해서 알

수 있죠?

한 가지 더 알려드리자면 이차함수의 대칭축이 $x=t$가 된다면 이차함수를 적분한 삼차함수는 $x=t$에서 변곡점을 갖습니다. 접선의 기울기가 최소가 되거나 최대가 된다는 말이죠.

그리고 구간별로 나눠진 함수는 함수를 해석하는 과정이 중요합니다. 일단 해석만 하면 나머지는 조건에 맞게 해보면 되거든요. 20번과 같이 둘 중 하나를 고를 수 있는 함수는 하나만 만족시키면 된다는 걸 잊지 마세요. 다시 말해서 다항함수라고 주지 않는 이상은 둘 중 하나를 갈아탈 수 있다는 거에요.