작성자 : 나카렌

2011학년도 대학수학능력시험 수리영역 가형 24번의 서술형 풀이

이 풀이에서는 직관적으로 참인 명제를 증명 없이 사용하는 것을 최소한으로 하고자 했습니다.

도움정리 1 다항함수 $f(x)$에 대하여, $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않는다는 것과 $f(a)=t$ and $f'(a)\neq 0$은 필요충분조건이다.

i) $f(a)\neq t$일 때

$f(x)-t=0$의 실근의 집합은 유한집합이므로, [$x\in(a-r,\,a+r)$이면 $f(x)\neq t$]을 만족하는 양수 r이 존재한다.

이 때 $f(a)-t>0$인 경우 $x\in(a-r,\,a+r)$이면 $f(x)-t>0$이고, $f(a)-t<0$인 경우 $x\in(a-r,\,a+r)$이면 $f(x)-t<0$이다.(그렇지 않으면, 중간값의 정리에 의하여 모순)

따라서 $|f(x)-t|$의 정의역을 $(a-r,\,a+r)$로 제한하면 $|f(x)-t|$는 $f(x)-t$와 일치하거나 $-f(x)+t$와 일치하므로 $x=a$에서 $|f(x)-t|$는 미분가능하다.

ii) $f(a)=t$ and $f'(a)=0$일 때

$f'(x)=0$의 실근의 집합은 유한집합이므로, [$x\in(a-r,\,a+r)-\{a\}$이면 $f'(x)\neq 0$]을 만족하는 양수 r이 존재한다.

평균값의 정리에 의해 $(a-r,\,a)$에서 $|f(x)-t|$는 단조증가 또는 단조감소이고, $(a,\,a+r)$에서도 $|f(x)-t|$는 단조증가 또는 단조감소이다.

따라서 $|f(x)-t|$의 정의역을 $(a-r,\,a)$로 제한하면 $|f(x)-t|$는 $f(x)-t$와 일치하거나 $-f(x)+t$와 일치하고, $|f(x)-t|$의 정의역을 $(a,\,a+r)$로 제한하면 $|f(x)-t|$는 $f(x)-t$와 일치하거나 $-f(x)+t$와 일치한다.

이 때 모든 경우에 대하여 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌미분계수와 우미분계수가 모두 0이므로, $x=a$에서 $|f(x)-t|$는 미분가능하다.

iii) $f(a)=t$ and $f'(a)\neq 0$일 때

$f'(x)=0$의 실근의 집합은 유한집합이므로, [$x\in(a-r,\,a+r)$이면 $f'(x)\neq 0$]을 만족하는 양수 r이 존재한다.

이 때 $f'(a)>0$인 경우 $x\in(a-r,\,a+r)$이면 $f'(x)>0$이므로 $x\in(a-r,\,a)$이면 $f(x)<t$, $x\in(a,\,a+r)$이면 $f(x)>t$이다. 따라서 $|f(x)-t|$의 정의역을 $(a-r,\,a)$로 제한하면 $|f(x)-t|$는 $-f(x)+t$와 일치하고, $|f(x)-t|$의 정의역을 $(a,\,a+r)$로 제한하면 $|f(x)-t|$는 $f(x)-t$와 일치한다.

따라서 $f(x)$의 $x=a$에서의 우미분계수는 $f'(a)$이고, 좌미분계수는 $-f'(a)$이므로 $x=a$에서 $|f(x)-t|$는 미분가능하지 않다.

$f'(a)<0$인 경우는 위와 같은 방법으로 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌미분계수는 $f'(a)$이고, 우미분계수는 $-f'(a)$임을 얻으므로, $x=a$에서 $|f(x)-t|$는 미분가능하지 않다.

증명 끝

도움정리 2 다항함수 $f(x)$와 양수 r에 대하여, $f(x)=t$를 만족하는 t가 존재하면 집합 $\{x|t-r<f(x)<t+r\}$은 서로소인 유한 개의 열린 구간의 합집합이다.

$f(x)=t$의 한 실근을 a라고 하자. 그러면 a는 $\{x|t-r<f(x)<t+r\}$의 원소이다. 이 때 [$a-d<\overline{x}<a+d$이면 $\overline{x}\in\{x|t-r<f(x)<t+r\}$]을 만족하는 양수 d가 존재하지 않는다고 하자. 그러면 $x=a$에서 $f(x)$의 극한값은 $f(a)$와 같지 않으므로 모순이다. 따라서 [$a-d<\overline{x}<a+d$이면 $\overline{x}\in\{x|t-r<f(x)<t+r\}$]을 만족하는 양수 d는 존재한다.

$f(x)$의 그래프는 수평점근선을 가지지 않으므로, a보다 작으면서 $\{x|t-r<f(x)<t+r\}$의 원소가 아닌 실수가 존재한다. 이 실수를 $a-L$이라고 하자. (이 때, 당연히 $d<L$이다)

이제, [$a-L\le x\le a-d$이면서, $f(x)=t-r$ 또는 $f(x)=t+r$]을 만족하는 x의 개수는 유한하다. 그 중에서 가장 큰 것을 $a-d_l$이라고 하자. 그러면 $a-d_l<\overline{x}<a+d$이면 $\overline{x}\in\{x|t-r<f(x)<t+r\}$이다.

마찬가지로 a보다 크면서 $\{x|t-r<f(x)<t+r\}$의 원소가 아닌 실수가 존재한다. 이 실수를 $a+R$이라고 하자. (이 때, 당연히 $d<R$이다)

이제, [$a+d\le x\le a+R$이면서, $f(x)=t-r$ 또는 $f(x)=t+r$]을 만족하는 x의 개수는 유한하다. 그 중에서 가장 작은 것을 $a+d_r$이라고 하자. 그러면 $a-d_l<x<a+d_r$이면 $\overline{x}\in\{x|t-r<f(x)<t+r\}$이다.

위에서 d_l, d_r을 선택한 방법에 의하여, $(a-d_l, a+d_r)$을 진부분집합으로 가지는 어떤 개구간도 $\{x|t-r<f(x)<t+r\}$의 부분집합이 아니다.

만약 $(a-d_l, a+d_r)$이 $\{x|t-r<f(x)<t+r\}$이라면, $\{x|t-r<f(x)<t+r\}$는 서로소인 유한 개의 열린 구간의 합집합이다.

그렇지 않다면, $(a-d_l, a+d_r)$에 속하지 않으면서 $\{x|t-r<f(x)<t+r\}$에 속하는 원소가 존재하고, 이를 a'이라고 하자.

이제 위와 같은 방법으로 [$(a'-d_l', a'+d_r')$는 $\{x|t-r<f(x)<t+r\}$의 부분집합이지만 $(a'-d_l', a'+d_r')$를 진부분집합으로 가지는 어떤 개구간도 $\{x|t-r<f(x)<t+r\}$의 부분집합이 아니다]를 만족시키는 양수 d_l'과 d_r'를 찾을 수 있다.

만약 $(a-d_l, a+d_r)$과 $(a'-d_l', a'+d_r')$의 합집합이 $\{x|t-r<f(x)<t+r\}$이라면, $\{x|t-r<f(x)<t+r\}$는 서로소인 유한 개의 열린 구간의 합집합이다. 그렇지 않다면 다시 위와 같은 방법을 반복할 수 있는데, 이러한 반복이 무한히 계속된다면 $f(x)=t-r$ 또는 $f(x)=t+r$이 무수히 많은 실근을 가지게 되고, 이는 모순이다. 따라서, 어느 순간에 $\{x|t-r<f(x)<t+r\}$는 서로소인 유한 개의 열린 구간의 합집합과 같아진다.

증명 끝

도움정리 3 다항함수 $f(x)$에 대하여, $g(t)$를

$$\{a \mid y = |f(x) - t| \text{가 } x = a \text{에서 미분가능하지 않다}\}$$

의 원소의 개수라고 정의하자. $g(t)$가 $t = \bar{t}$에서 연속이라는 것과 [$f(x) = \bar{t}$인 모든 x에 대하여 $f'(x) \neq 0$]는 필요충분조건이다.

도움정리 1에 의하여, $g(t)$는 $y = f(x)$와 $y = t$의 그래프의 교점이지만 접점이 아닌 점의 개수와 같다.

i) $f(x) = \bar{t}$인 모든 x에 대하여 $f'(x) \neq 0$일 때

$f'(x) = 0$의 실근의 집합은 유한집합이므로, [$\bar{t} - r < f(x) < \bar{t} + r$인 모든 x에 대하여 $f'(x) \neq 0$]을 만족하는 양수 r이 존재한다.

이 때 $\{x \mid \bar{t} - r < f(x) < \bar{t} + r\}$는 **도움정리** 2에 의하여 서로소인 유한 개의 열린 구간의 합집합이다. 각각의 열린 구간에서 $f(x)$는 단조증가 또는 단조감소이므로, $\bar{t} - r < t < \bar{t} + r$일 때 $g(t)$는 $\{x \mid \bar{t} - r < f(x) < \bar{t} + r\}$를 이루는 열린 구간의 개수와 같다. 따라서 $\bar{t} - r < t < \bar{t} + r$이면 항상 $g(t) = g(\bar{t})$이고, $t = \bar{t}$에서 $g(t)$는 연속이다.

ii) $f(x) = \bar{t}$인 어떤 x에 대하여 $f'(x) = 0$일 때

$f'(x) = 0$의 실근의 집합은 유한집합이므로, [$\bar{t} - r < f(x) < \bar{t}$인 모든 x에 대하여 $f'(x) \neq 0$이고, $\bar{t} < f(x) < \bar{t} + r$인 모든 x에 대하여 $f'(x) \neq 0$]을 만족하는 양수 r이 존재한다.

따라서 i)의 경우처럼 $\{x \mid \bar{t} - r < f(x) < \bar{t} + r\}$는 **도움정리** 2에 의하여 서로소인 유한 개의 열린 구간의 합집합이다. 또한 $\{x \mid \bar{t} - r < f(x) < \bar{t} + r\}$을 이루는 각각의 열린 구간에는 $f(x) = \bar{t}$를 만족하는 x가 하나씩 존재한다.(그렇지 않다면 롤의 정리에 의하여 $f(x) = \bar{t}$이고 $f'(x) = 0$인 x가 무수히 많이 존재하게 되는데, 이는 모순이다)

이제, $\{x \mid \bar{t} - r < f(x) < \bar{t} + r\}$을 이루는 열린 구간 중에서, $f(x) = \bar{t}$이고 $f'(x) = 0$인 x를 포함하지 않는 열린 구간의 개수를 N_0이라고 하자.

그러면, $t = \bar{t}$에서 함숫값은 N_0이다.

한편 $\{x \mid \bar{t} - r < f(x) < \bar{t}\} = \left\{x \mid (\bar{t} - \frac{1}{2}r) - \frac{1}{2}r < f(x) < (\bar{t} - \frac{1}{2}r) + \frac{1}{2}r\right\}$이고

$\{x \mid \bar{t} < f(x) < \bar{t} + r\} \equiv \left\{x \mid (\bar{t} + \frac{1}{2}r) - \frac{1}{2}r < f(x) < (\bar{t} + \frac{1}{2}r) + \frac{1}{2}r\right\}$이므로

$\{x \mid \bar{t} - r < f(x) < \bar{t}\}$도 서로소인 유한 개의 열린 구간의 합집합이고 $\{x \mid \bar{t} < f(x) < \bar{t} + r\}$도 서로소인 유한 개의 열린 구간의 합집합이며, 각각의 구간에서 $f(x)$는 단조증가 또는 단조감소이다.

이제 $\{x \mid \bar{t} - r < f(x) < \bar{t}\}$에 포함되는 열린 구간의 개수를 N_-, $\{x \mid \bar{t} < f(x) < \bar{t} + r\}$에 포함되는 열린 구간의 개수를 N_+라고 하면, i)에 의해 $t = \bar{t}$에서 좌극한값은 N_-, 우극한값은 N_+이다.

그 다음으로, $\{x \mid \bar{t} - r < f(x) < \bar{t} + r\}$을 이루는 열린 구간 중에서, $f(x) = \bar{t}$이고

$f'(x)=0$인 x를 포함하지 않는 열린 구간 중 임의로 하나를 선택하면, 선택한 구간에 포함되면서 $\{x|\bar{t}-r<f(x)<\bar{t}\}$에도 포함되는 열린 구간이 오직 하나 존재하고, 선택한 구간에 포함되면서 $\{x|\bar{t}<f(x)<\bar{t}+r\}$에도 포함되는 열린 구간이 오직 하나 존재한다.

따라서 $N_0 \le N_-$, $N_0 \le N_+$이다.

한편, $\{x|\bar{t}-r<f(x)<\bar{t}+r\}$을 이루는 열린 구간 중에서, $f(x)=\bar{t}$이고 $f'(x)=0$인 x를 포함하는 열린 구간 중 임의로 하나를 선택하면, 선택한 구간에 포함되면서 $\{x|\bar{t}-r<f(x)<\bar{t}\}$에도 포함되는 열린 구간이 존재하거나 선택한 구간에 포함되면서 $\{x|\bar{t}<f(x)<\bar{t}+r\}$에 포함되는 구간이 존재한다.

따라서 $N_-=N+n$인 자연수 n이 존재하거나 $N_+=N_0+m$인 자연수 m이 존재한다.

위에서 살펴본 바에 따라, $g(t)$는 $t=\bar{t}$에서 불연속이다.

증명 끝

도움정리 4 삼차함수 $y=g(x)$가 x축과 만나는 서로 다른 세 점의 x좌표를 작은 것부터 차례로 0, β, γ이라고 할 때,

$$\int_0^\beta g(x)dx+\int_\beta^\gamma g(x)dx=0$$

이면 0, β, γ는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

실수 p, 양수 q, 실수 k에 대하여

$$(p-q)+p+(p+q)=3p=\beta+\gamma$$
$$(p-q)p+p(p+q)+(p+q)(p-q)=3p^2-q^2=\beta\gamma$$
$$(p-q)p(p+q)-k=0$$

라고 두면

$$(\beta+\gamma)^2-3q^2=3\beta\gamma$$
$$3q^2=\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma=\beta^2+\gamma(\gamma-\beta)>0$$

이므로 위의 등식을 만족하는 실수 p, 양수 q, 실수 k는 존재한다.

따라서 $g(x)=ax(x-\beta)(x-\gamma)=a(x-p+q)(x-p)(x-p-q)+k$라고 둘 수 있다. 이 때 $k>0$이면 $0<p-q<p<\beta<\gamma<p+q$이므로

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\beta ax(x-\beta)(x-\gamma)dx\right| &> \left|\int_{p-q}^{p}\{a(x-p+q)(x-p)(x-p-q)+k\}dx\right| \\ &= \left|\int_{p}^{p+q}\{a(x-p+q)(x-p)(x-p-q)+k\}dx\right| \\ &> \left|\int_\beta^\gamma ax(x-\beta)(x-\gamma)dx\right|\end{aligned}$$

이므로 모순이고, 마찬가지로 $k<0$이어도 모순이다. 따라서 $k=0$이고, $0=p-q$, $\beta=p$, $\gamma=p+q=2\beta$이다.

증명 끝

풀이 문제에서 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속이라고 하였으므로, **도움정리 3**에 의하여 $f(x)=3$인 어떤 x에 대하여 $f'(x)=0$이고, $f(x)=19$인 어떤 x에 대하여 $f'(x)=0$이고, $f(x)\neq 3$ and $f(x)\neq 19$이면 $f'(x)\neq 0$이다.

따라서 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근은 두 개 이상 존재한다.

$f'(x)=0$의 서로 다른 실근이 2개라고 가정하자.

$f'(x)=0$의 서로 다른 실근 중에서 작은 것을 α, 큰 것을 β라고 하자. 만약 α가 중근이라면 $f'(x)=4(x-\alpha)^2(x-\beta)$이다. 이 때 $x<\alpha$ 또는 $\alpha<x<\beta$과 $f'(x)<0$이 필요충분조건이므로 $f(\alpha)=19$, $f(\beta)=3$이다. β는 n중근이 아니므로 문제의 조건에서 $\beta=0$인데, 이는 $f'(3)<0$과 모순이다.

만약 β가 중근이라면 $f'(x)=4(x-\alpha)(x-\beta)^2$이다. 이 때 $x<\alpha$와 $f'(x)<0$이 필요충분조건이므로 $f(\alpha)=3$, $f(\beta)=19$이다. α는 n중근이 아니므로 문제의 조건에서 $\alpha=0$인데, 이는 $f'(3)<0$과 모순이다.

이에서 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근은 세 개임을 알 수 있다.

이제 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근을 작은 것부터 α, β, γ라고 하자. 그러면 $\displaystyle\int_0^\beta 4x(x-\beta)(x-\gamma)dx=19-3$, $\displaystyle\int_\beta^\gamma 4x(x-\beta)(x-\gamma)dx=3-19$이고, **도움정리 4**에 의하여 $\gamma=2\beta$이다.

이에서 $f'(x)=4x(x-\beta)(x-2\beta)=4x^3-12\beta x^2+8\beta^2 x$이고, 다시 문제의 조건에서 $f(x)=x^4-4\beta x^3+4\beta^2x^2+3$임을 알 수 있다. 이에 $x=\beta$를 대입하면

$$f(\beta)=\beta^4-4\beta^4+4\beta^4+3=19$$

에서 $\beta=2$를 얻고,

$$f(x)=x^4-8x^3+16x^2+3$$
$$f(-2)=16+8\times 8+16\times 4+3=80+64+3=147$$

을 얻는다.