11수능 수리 가형 17번 해설 made by 호랑.

안녕하세요. 호랑입니다. 제가 해설해보고 싶은 문제는 11수능 수리 가형 17번입니다. 2011년 재수 학원을 다니면서 4분의 수학 강사 분들을 뵈었지만 어느 분도 이 문제에 대해서는 언급하지 않으셨습니다. 인터넷 해설 강의는 들어보지 않았지만, 인터넷에서 중요하게 다뤄지는 문제들이 재수학원 수업에서도 중요하게 다뤄지는 현실을 볼 때 아마도 해설 강의에서도 중요하게 다루어지지 않은 것 같습니다. 어느 해설 강의도 참고하지 않아 사실과 다를 수는 있습니다.

사실, 인터넷에서 다루어졌냐 아니냐는 그리 중요하지 않습니다. 그보다 제가 여러분께 전달하고 싶은 것은 '이 문제가 2011년 수험 생활을 한 학생에게는 어떤 식으로 보여졌느냐, 이 문제는 어느 교과 개념과 연결되어 있느냐'입니다. 저는 이 17번 문제가 중요하다고 판단합니다. 물론 평가원이 출제한 문제, 특히 수능 문제는 모든 문제가 중요합니다. 다만 이 문제는 가진 중요성에 비해 좋은 평가를 받지는 못하는 것 같아, 혹은 적절한 풀이가 없는 것 같아 부족한 실력이지만 이렇게 글을 쓰게 되었습니다. 얼마 전까지 수험생이었으므로 풀이에 오류가 있을수도 있습니다. 또한 '분명히' 더 말해야 할 것들도 있을 것입니다. 그 부분에 있어서는 저보다 뛰어나신 분께 부탁드립니다.

저는 이과생으로서 적분이 항상 어려웠습니다. 부정적분은 미분의 역연산이라는 명쾌한 정의가 있어 어렵지 않았습니다. 연산 과정의 증명도 미분의 역연산이라는 아이디어만 사용하면 간단해지니까요. 그런데, 정적분에서부터 뭔가 꼬이는 느낌을 받았습니다. 그래서 교과서를 여러 번 들여다보았고, 기초적인 수준 정도는 이해하게 되었습니다. 그런데 미분과 적분의 관계를 밝히는 증명은 '외워서 할 수는 있는데 딱히 와닿지는 않는' 증명이었습니다. 아마도 많은 수험생들이 미적분을 배울 때 그러한 느낌을 받을 것입니다. 그런데 저는 이 문제가 미적분을 조금 더 이해하는 계기가 되었습니다. 그래서 제가 좋아하는 문제 중 하나입니다. 저의 갈증을 풀어준 문제이니까요.. ^^ 잡설은 이만하고 해설을 시작하겠습니다.

17. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0 \leqq t \leqq 5)$에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases} 4t & (0 \leqq t < 1) \\ -2t+6 & (1 \leqq t < 3) \\ t-3 & (3 \leqq t \leqq 5) \end{cases}$$

$0 < x < 3$인 실수 x에 대하여 점 P가

시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리,
시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리,
시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리

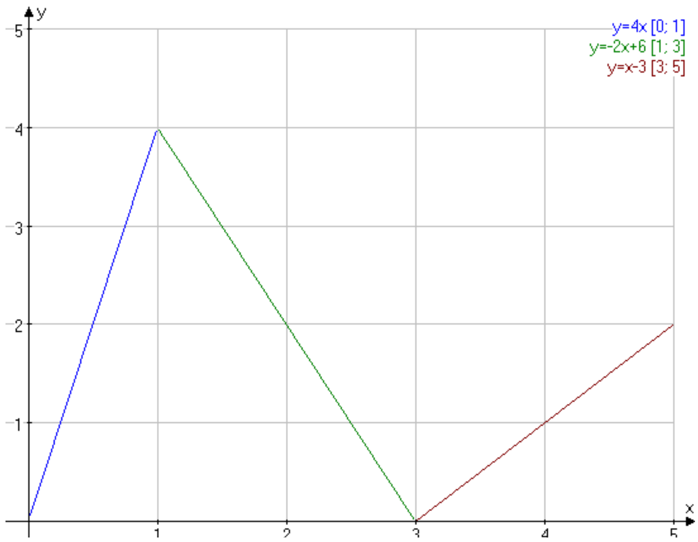
중에서 최소인 값을 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(1)=2$
ㄴ. $f(2)-f(1)=\int_1^2 v(t)\,dt$
ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄴ, ㄷ

2011학년도 대학수학능력시험 수리영역 가형 17번 문제입니다 (정답률 29프로, 메가스터디 기준). 문제에서 속도 그래프를 제시하였고, f(x)는 거리의 최솟값으로 정의됩니다. v(t)의 개형은 아래와 같습니다.



수능 문제 유형 중 ㄱㄴㄷ 문제는 보기 자체가 힌트임이 잘 알려져 있습니다. 이 문제 역시 그렇습니다. 순서대로 풀어보겠습니다. ㄱ은 f(1)의 값을 묻고 있습니다. 정의역 [0, 5] 가 0~1, 1~3, 3~5 세 구간으로 나눠지고, 각각의 넓이는 2,4,2입니다. 따라서 이동 거리의 최솟값은 2이므로 f(1)의 값은 2가 맞습니다.

ㄴ 보기를 살펴보겠습니다. ㄱ을 통해 f(1)의 값을 구하였고, 식의 우변인 적분 값은 그래프를 통해 쉽게 구할수 있습니다. 따라서 f(2)의 값만 구하면 쉽게 정오판별을 할 수 있습니다. f(2)의 경우 0~2, 2~4, 4~5 세 구간으로 나눠지고 각각의 값은 5, 1.5, 1.5입니다. f(2)=1.5입니다. 좌변의 값은 음수, 우변의 값은 양수를 가지므로 등식은 성립하지 않습니다. 이제 ㄷ입니다.

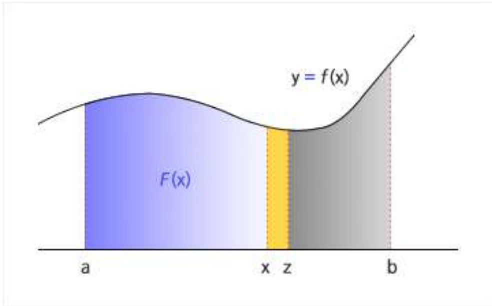
보기 ㄷ은 이 문제의 하이라이트입니다. x=1에서 f(x)가 미분가능한지 묻고 있습니다. 문제를 푸는 '나'는 ㄱ, ㄴ을 통해 f(1), f(2)의 값은 구하였지만 아직 f(x)의 전체 모습은 파악하지 못했습니다. 그래서 처음에는 당황하지만, 문제를 다시 생각하고, 전체를 파악할 필요도 없이 x=1에서 미분가능성을 판단하기만 하면 된다고 판단합니다. 미분계수는 평균변화율의 극한값이므로 좌극한값과 우극한값을 각각 구한 후에 같은지 판단하면 됩니다. 극한값이 존재하지 않는다면 미분가능하지 않은 것입니다. 이제 정의에 따라 식을 써봅니다.

$\lim_{h \to -0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 라는 식이 맞는지 판단하면 됩니다.

여기서 잠시 미적분학 기본 정리를 살펴보고 가겠습니다.

미적분의 기본 정리란?

a 이상 b 이하의 실수를 모은 집합을 닫힌 구간 [a,b]라 부른다. 이 구간에서 연속 함수 f(x)를 생각하는데, 함숫값 f(x)가 0 이상인 경우를 먼저 생각하기로 하자. 이 때, 구간 [a,b]에서 f(x)와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 게 목표다.



구간 [a,x]에서 f(x)와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 F(x)라 하자. 즉 그림에서 하늘색으로 표시한 영역의 넓이를 말한다. 구하고자 하는 값은 F(b) 인데, 이 값을 구하는 것만으로도 힘들어 보이는데 궁금하지도 않은 F(x)는 뭐 하러 다 구하는 건지 속내가 자못 궁금할 수도 있겠다. 그게 수학의 묘미다. 달랑 하나의 값만 따로 구하는 것보다 전체를 통째로 구하는 게 (할 수만 있다면야) 더 많은 정보를 주기 때문이다. 따지고 보면 세상사 그런 게 한둘이랴만...

F(a)=0이라는 삼척동자도 아는 당연한 사실, 그것도 F(b)와는 무관한 사실만 하나 알았을 뿐, 모르는 것만 잔뜩 늘려 놓고 딴소리한다고 타박할 수도 있겠다. 그런데 이 F(x)를 미분하면 아는 녀석이 나온다! 즉, 다음 극한값을 구하자는 발상을 하는 순간 미적분의 기본 정리는 절반은 먹고 들어간다!

$$F'(x) = \lim_{z \to x} \frac{F(z)-F(x)}{z-x}$$

몫에 등장하는 분자 F(z)-F(x)는 위의 그림에서 연노랑색 영역의 넓이다. (편의상 z가 x보다 큰 경우만 생각하자.) 이 영역의 넓이는 밑변의 길이 z-x와, 구간 내에서의 함숫값의 평균을 곱한 값이다. 따라서, F(z)-F(x)를 z-x로 나눈 값은 구간 [x,z]에서의 함숫값의 평균이다. 그런데 함수가 x에서 연속이므로, z가 x에 가까워지면 이 평균 높이는 당연히 f(x)로 가까워져야 한다! 즉, 다음 사실을 얻는다.

$$F'(x) = f(x)$$

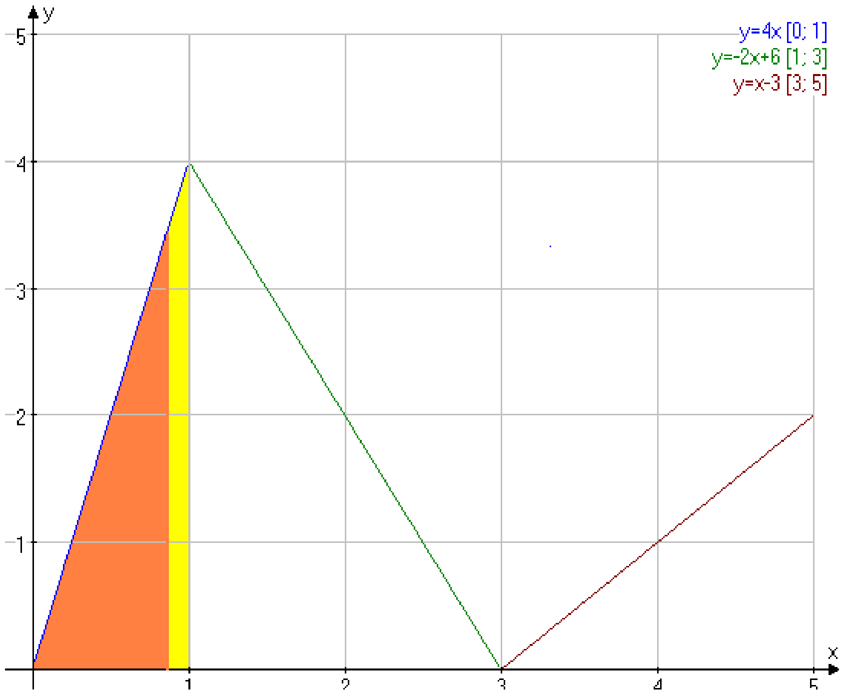
거칠게 표현하여 '넓이를 미분하면 원래 함수가 나온다'는 건데, 이를 미적분의 기본 정리라 부른다. 물론 평균 높이의 개념을 쓰지 않고도 엄밀한 증명을 할 수 있지만, 본질적으로 위의 설명과 별반 차이가 없고, 고등학교 교과서를 포함한 어지간한 적분 교재에는 모두 나와 있으니 참고하기 바란다.

연습 삼아 f(x) = 2x라 하고, 구간 [1, x]에서 넓이를 구해보라. 사다리꼴의 넓이를 구하는 간단한 문제이므로 어렵지 않게 x^2-1임을 알 수 있는데, 이를 미분하면 원래 함수 2x를 복원할 수 있음을 확인하길 바란다. 여기에서는 f(x)가 0이상인 경우만 다뤘지만, f(x)가 음수값을 갖는 경우 x축 아래 부분의 넓이는 음수로 간주할 경우 역시 F'(x) = f(x)가 성립한다는 것도 보일 수 있다.

출처 : 네이버 캐스트 - 미적분의 기본정리 ; 정경훈 교수 씀.
(http://navercast.naver.com/contents.nhn?contents_id=4658&path=|453|490|&leafId=646)

위의 개념을 다시 한 번 이해하고, 이제 문제를 풀러 갑니다.

천천히 살펴봅시다. f(1+h) 의 값은 무엇일까요? 보기 ㄱ으로부터 x=1일때 각각의 값이 2,4,2 임을 나는 이미 알고 있습니다. 즉, 0~1의 넓이와 3~5의 넓이값이 동일합니다. 따라서 f(1+h) 의 경우 h〉0 이라면 3+h ~ 5까지의 넓이값이 f(1+h)의 값이며, h〈0인 경우 0 ~ 1+h 까지의 넓이값이 f(1+h)입니다. (h〈0인 경우 1+h〈1 입니다.) 이제 좌변부터 살펴봅시다.



주황색부분의 넓이가 f(1+h)입니다. 이 값과 f(1), 즉 0~1까지의 면적과의 차이는 노란색 부분의 넓이값의 음수값입니다. 그런데 분모가 h<0 이므로 $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 은 노란색 사다리꼴의 평균 높이를 의미합니다. h가 0으로 가까이 가므로 이 평균 높이의 극한값은 4입니다. 따라서 좌변의 값은 4입니다. 보기 ㄱ에서 주어졌듯이, f(1)=2 이므로 0~1까지의 넓이값과 3~5까지의 넓이값 모두 f(1)이 된다는 것에 유의하여 동일한 방식으로 우변을 생각해보면 우변의 값은 0임을 알 수 있습니다. 따라서 ㄷ은 틀립니다.

여기까지가 저의 풀이였습니다. 저는 이 문제를 풀고 나서 미적분에 대한 이해가 조금은 깊어졌습니다. 와닿지 않던 미적분학 기본정리가 어느 정도 이해됐다고 할까요. 매우 기분이 좋았던 기억이 있습니다. 여러분의 풀이는 어떠할지 모르겠습니다. 이것보다 더 좋은 풀이도 있겠지요. 저는 다만 저처럼 미적분학 기본정리에 대해 이해가 부족하셨던 분들을 위해 도움을 드리고자 이 글을 썼습니다. 도움이 되셨는지 모르겠습니다. 오늘은 2012년 1월 9일 새벽입니다. 16일에 서울대 생명과학부 논술을 치러 갑니다. 이 글을 보고 도움이 되셨다면, 저에게 자그마한 운이라도 오도록 기도해주시면 어떨까요. ^^ 부족한 해설 읽어주셔서 감사드립니다.