제 2 교시

2020학년도 3월 CM.Lab 모의고사 나형

수학 영역 (나 형)

홀수형

성명		수험 번호						—				

○ 자신이 선택한 유형(가 형/나 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

솔직히 초성민이 좀 짱이다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

초성민연구소

제 2 교시

수학 영역(나형)

5지선다형

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{n}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. $\sqrt[3]{64}\times\sqrt[3]{27}$ 의 값은? [2점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

3. 두 집합 $A=\{1, 3, 4\}$, $B=\{1, a\}$가

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$

를 만족시킬 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

4. 첫째항이 3이고, 공차가 2인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_4의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

5. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(1)=2$, $g(3)=1$일 때, $(f \circ g)(3)$의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

6. $2^{\log_2 6} \times 3^{\log_3 6}$의 값은? [3점]

① 48 ② 44 ③ 40 ④ 36 ⑤ 32

7. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$을 만족시킬 때, a_2의 값은? [3점]

① -7 ② -4 ③ -1 ④ 2 ⑤ 5

8. 집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 A에 대하여

$$\{1, 2, 3\}\cap A=\{1, 2\}$$

를 만족시키는 집합 A의 개수는? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

9. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=5,\ \lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

10. 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 그래프가 점 $(4, 5)$를 지난다. 이 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 4 ⑤ 2

11. 닫힌 구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)=\sqrt{x+5}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

12. 함수 $f(x)=2x+a$에 대하여 $f(x)$의 그래프와 $f(x)$의 역함수 $g(x)$의 그래프가 만나는 점을 A라 할 때, $\overline{OA}=2\sqrt{2}$이다. 양수 a의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

13. 실수 x에 대한 두 조건이 다음과 같다.

$p : |x-1|<3$,

$q : x^2+ax+b<0$

p와 q가 필요충분조건이기 위한 두 상수 a와 b에 대하여 $a-b$의 값은? [3점]

① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

14. 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{a, a+1, a+2\}$가

$n(A\cap B)=2$

이도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

15. $\log_{a^2}(a^2-2)=\log_a\sqrt{a}$ 일 때, 양수 a의 값은? [4점]

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 4 ⑤ 2

16. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$9n+1<\frac{\{a_n\}^2}{n+1}<9n+2,\ a_n>0$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [4점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

17. 공비 r가 $0<r<1$인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\frac{4}{3}(a_1+a_2)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

를 만족시킬 때, r의 값은? [4점]

① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

18. 두 집합 A, B에 대하여 $A=\{1, 2, 3, 4\}$이고, 함수 $f : A\to B$는 집합 $\{1, 2\}$의 임의의 두 원소 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)-f(y)$$

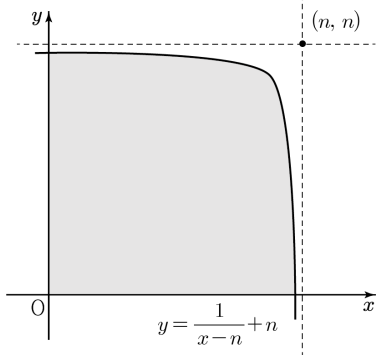
를 만족시킨다. 함수 f의 치역의 원소의 개수를 a라 하자. $f(1)+a$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

19. 자연수 n에 대하여 좌표평면에서 영역

$$\left\{(x, y) \mid 0 \le x < n,\ y \ge 0,\ y \le \frac{1}{x-n}+n\right\}$$

에 속하는 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 a_n이라 하자. 다음은 $a_n \le 36$을 만족시키는 자연수 중 가장 큰 자연수 p를 구하는 과정이다.



곡선 $y=\frac{1}{x-n}+n$과 y축이 만나는 점의 좌표가 $\left(0,\ n-\frac{1}{n}\right)$이므로 주어진 영역에 포함될 수 있는 점의 y좌표 중 자연수를 작은 순서대로 나열하면
1, 2, …, (가)

$0<k\le$ (가) 인 자연수 k에 대하여 직선 $y=k$와 곡선 $y=\frac{1}{x-n}+n$이 만나는 점의 x좌표는 $n+\frac{1}{k-n}$이므로 주어진 영역에 속하는 점 중 y좌표가 k이고 x좌표가 자연수인 점의 개수는 $n-1$개다.

따라서 주어진 영역에 속하는 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수는

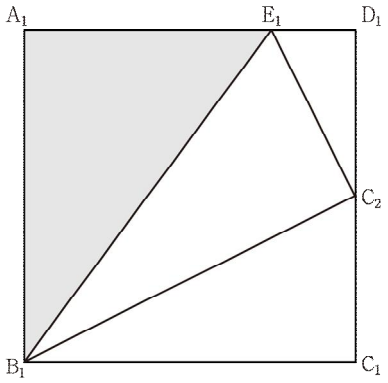
$$\sum_{k=1}^{\text{(가)}}(n-1)=\text{(나)}=a_n$$

이고, $a_n \le 36$을 만족시키는 가장 큰 자연수는 p이다.

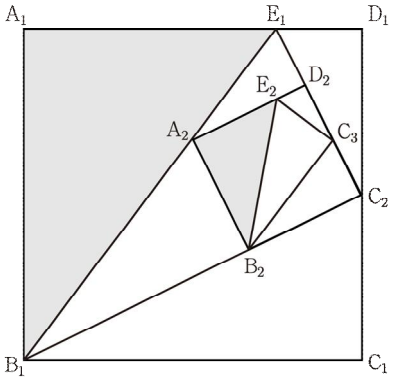
위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(p)+g(p)$의 값은? [4점]

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 C_1D_1의 중점을 C_2라 하고 점 C_2를 지나고 선분 B_1C_2에 수직인 직선과 선분 A_1D_1이 만나는 점을 E_1이라 할 때, 삼각형 $A_1B_1E_1$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 B_1E_1 위의 한 점 A_2와 선분 B_1C_2 위의 한 점 B_2, 선분 C_2E_1 위의 한 점 D_2에 대하여 사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 정사각형일 때, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 삼각형 $A_2B_2E_2$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2

① $\frac{208}{31}$ ② $\frac{210}{31}$ ③ $\frac{212}{31}$
④ $\frac{214}{31}$ ⑤ $\frac{216}{31}$

21. 함수 $f(x)=a\sqrt{4-x}$ $(a>0)$에 대하여 $f(x)$와 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 $0 \le x \le n$ $(n=1, 2, 3)$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$g\left(\frac{f(x)+x}{n+1}\right) \ge x$$

를 만족시킨다. $f(-5)$의 최솟값을 a_n이라 할 때, $(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2$의 값은? [4점]

① 15 ② $\frac{31}{2}$ ③ 16 ④ $\frac{33}{2}$ ⑤ 17

단답형

22. $\log_4 8 \times \log_8 16$의 값을 구하시오. [3점]

23. 첫째항과 공비가 모두 4인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_4의 값을 구하시오. [3점]

24. 좌표평면 위의 두 점 $(2, \log 2)$, $(4, \log m)$을 지나는 직선의 기울기가 1일 때, m의 값을 구하시오. [3점]

25. 첫째항이 7인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 n번째 항까지의 합 S_n이

$$S_n = 2n^2 + an$$

을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$의 a번째 항을 구하시오. [3점]

26. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{\infty}(8k - ka_k) = 2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

27. 커피와 빵을 판매하는 한 음식점이 있다. 이 음식점을 방문한 손님 50명을 대상으로 주문내역을 조사한 결과, 커피를 주문하지 않은 손님은 30명, 커피와 빵 중 아무것도 주문하지 않은 손님이 10명이다. 빵만 주문한 손님의 수가 커피와 빵을 모두 주문한 손님의 수의 5배일 때, 커피만 주문한 손님의 수를 구하시오. [4점]

28. 좌표평면에서 직선 $2^{n^2}x-2^{4n}y+1=0$의 기울기가 정수가 되도록 하는 10보다 작은 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

29. 공차가 각각 2인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$$

라 하자. $S_nT_n<0$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합이 9가 되도록 하는 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_{10}-b_3$의 최댓값을 구하시오. [4점]

30. 세 자연수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}ax+1 & (x<0)\\ \dfrac{bx+1}{cx+1} & (x\geq 0)\end{cases}$$

이다. $f(x)$에 대하여 방정식

$$f(nf(x))=\frac{1}{3}$$

의 모든 실근의 합을 a_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$이

$$a_3>a_2>a_1>a_4=a_5=a_6=\ \cdots\ =-2$$

를 만족시킨다. $f(a+b+c)=\dfrac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2020학년도 3월

CM.Lab 모의고사 나형

펴낸이 : 초성민, 김경호, 김우현, 김한온, 송승형, 최형락,

검토자 : 남영준(아르베수학), 김경로(중앙대),
박성현(서울대학교), 권민주(대치이강),
서용훈(인재와고수)

본 모의평가에 대한 저작권은 초성민연구소에게 있으며, 저작권자의 허락 없이 전부 또는 일부를 영리적 목적으로 사용하거나 2차적 저작물 작성 등으로 이용하는 일체의 행위는 정보통신망 이용촉진 및 정보보호, 저작권 관련 법률에 따라 금지되어 있습니다.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.