정답 & 해설

[난문현답 기출 정답]

1. ⑤
2. ④
3. ③
4. 51
5. ⑤
6. 27
7. 40
8. ③
9. ①
10. ②

[추가 과제 정답]

1) **정답** ②

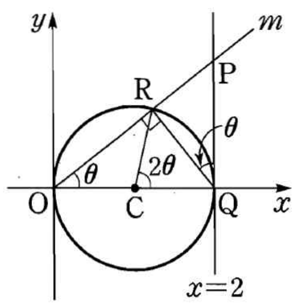
$x^\circ = \dfrac{\pi}{180}x$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty} x^\circ \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{180}x\sin\frac{1}{x} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\dfrac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x\to\infty$ 일 때 $t\to 0$ 이므로 ㉠은

$$\lim_{t\to 0}\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{\pi}{180}\cdot 1=\frac{\pi}{180}$$

2) **정답** $\dfrac{1}{2}$



오른쪽 그림과 같이 $\overline{RC}$, $\overline{RQ}$ 를 그으면
$\angle RCQ = 2\theta$ 이므로 부채꼴 RCQ 에서
$l = 2\theta$
또 $\triangle PRQ \backsim \triangle PQO$ 이므로
$\angle PQR = \angle POQ = \theta$
직각삼각형 POQ 에서
$\overline{PQ}=\overline{OQ}\tan\theta = 2\tan\theta$
직각삼각형 PRQ 에서

$$\overline{PR}=\overline{PQ}\sin\theta = 2\tan\theta\sin\theta = \frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{PR}}{l^2} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}}{4\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{2\cos\theta}$$

$$=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

3) **정답** ①

$f'(x) = -4\sin x + 2\sin 2x = -4\sin x + 4\sin x\cos x$
$\quad = 4\sin x(\cos x - 1)$
$f'(x)=0$ 에서 $\sin x = 0$ 또는 $\cos x = 1$
$\therefore x=\pi$ ($\because 0 < x < 2\pi$)

x	(0)	$\cdots$	π	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-5	↗	

따라서 $f(x)$는 $x=\pi$에서 극솟값 -5를 가지므로
$a=\pi$, $b=-5$ $\therefore ab=-5\pi$

4) **정답** 8

[풀이]

$f(x)=\sqrt{x}$ 로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

점 P의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t})$ $(t>0)$라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ 이므로 접선의 방정식은 $y-\sqrt{t}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$

$$\therefore y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cdot 2+\dfrac{\sqrt{t}}{2}=\dfrac{2+t}{2\sqrt{t}}$

$x=6$을 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cdot 6+\dfrac{\sqrt{t}}{2}=\dfrac{6+t}{2\sqrt{t}}$

따라서 사다리꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2+t}{2\sqrt{t}}+\frac{6+t}{2\sqrt{t}}\right)\cdot(6-2)=2\cdot\frac{4+t}{\sqrt{t}}=2\left(\frac{4}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)$$

이때, $\dfrac{4}{\sqrt{t}}>0$, $\sqrt{t}>0$에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}\ge 2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{t}}\cdot\sqrt{t}}=4$$

(단, 등호는 $t=4$일 때 성립)

이므로 사다리꼴의 넓이의 최솟값은

$2\cdot 4=8$

5) **정답** ②

$x=2\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\left[\,2\theta+\sin 2\theta\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

따라서 반지름의 길이가 r인 원의 넓이가 π이므로

$$\pi r^2=\pi \qquad \therefore r=1\ (\because r>0)$$

[다른 풀이]

$y=\sqrt{4-x^2}$ 의 그래프는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원의 위쪽 반원이므로 $\displaystyle\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$의 값은 반지름의 길이가 2인 원의 넓이의 $\dfrac{1}{4}$과 같다.

$$\therefore \int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2=\pi$$

따라서 $\pi r^2=\pi$이므로 $r=1$ ($\because r>0$)

6) **정답** ①

[풀이]

$x+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=1$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^2 e^x f(x+1)\,dx=\int_1^3 e^{t-1}f(t)\,dt$$

이때 $1\le t\le 3$에서 $f(t)=2$이므로

$$\int_1^3 e^{t-1}f(t)\,dt=\int_1^3 2e^{t-1}dt=\left[2e^{t-1}\right]_1^3=2e^2-2$$

[다른 풀이]

함수 $y=f(x+1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$$f(x+1)=\begin{cases}2x+2 & (-1\le x\le 0)\\ 2 & (0\le x\le 2)\end{cases}$$

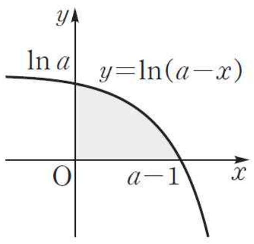
$$\therefore \int_0^2 e^x f(x+1)\,dx=\int_0^2 2e^x\,dx=\left[2e^x\right]_0^2=2e^2-2$$

7) **정답** ②

$y=\ln(a-x)$에서 $\quad a-x=e^y$

$\therefore\ x=a-e^y$

오른쪽 그림에서 어두운 부분의 넓이는



$$\int_0^{\ln a}(a-e^y)\,dy$$
$$=\left[ay-e^y\right]_0^{\ln a}$$
$$=a\ln a-a+1$$

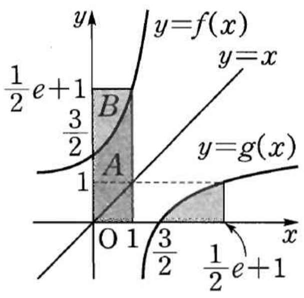
따라서 $a\ln a-a+1=1$이므로

$a(\ln a-1)=0,\quad \ln a-1=0\ (\because\ a>1)$

$\ln a=1 \quad \therefore\ a=e$

8) **정답** $\frac{1}{2}e+1$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}e+1} g(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=\frac{1}{2}e+1$로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉 B와 같다.

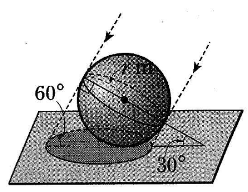


$$\therefore \int_0^1 f(x)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}e+1} g(x)dx=A+B=\frac{1}{2}e+1$$

9) 답 $2\sqrt{3}$

[해설]

애드벌룬의 반지름의 길이를 r m 라 하고 오른쪽 그림과 같이 애드벌룬을 지면과 접하도록 이동시키면 태양 빛과 수직으로 만나는 구의 지름이 지면과 이루는 각의 크기가 30°이다.



이때 $8\sqrt{3}\pi\cos30^\circ=\pi r^2$이므로

$$8\sqrt{3}\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi r^2$$

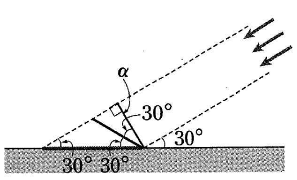
$r^2=12 \qquad \therefore r=2\sqrt{3}$

10) 답 ⑤

[해설]

오른쪽 그림과 같이 태양 빛과 수직인 평면을 α라 하면 평면 α가 지붕과 이루는 각의 크기는 60°이다.

또 집전판의 평면 α 위로의 정사영은 집전판의 그림자의 평면 α 위로의 정사영과 같다.



이때 집전판의 넓이를 S, 정사영의 넓이를 S'이라 하면

$S'=S\cos30^\circ \qquad$ …… ㉠

한편 집전판의 그림자의 넓이가 21이므로

$S'=21\cos60^\circ \qquad$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\qquad S\cos30^\circ=21\cos60^\circ$

$$\therefore S=21\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=7\sqrt{3}$$

11) 답 ⑤

[해설]

(평면 $AEHD$) // (평면 FNM) 이므로 삼각형 FNM과 평면 $APQD$가 이루는 각의 크기는 평면 $AEHD$와 평면 $APQD$가 이루는 각의 크기와 같다.

$\overline{EP}=4$이므로

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{EP}^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$$

$\angle EAP=\theta$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{AE}}{\overline{AP}}=\frac{8}{4\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이때

$$\triangle FNM=\square BFGC-(\triangle BFM+\triangle FGN+\triangle CMN)$$
$$=8\times8-\left(\frac{1}{2}\times4\times8+\frac{1}{2}\times8\times4+\frac{1}{2}\times4\times4\right)$$
$$=64-40=24$$

이므로 $\triangle FNM$의 평면 $APQD$ 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle FNM\cos\theta=24\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{48\sqrt{5}}{5}$$

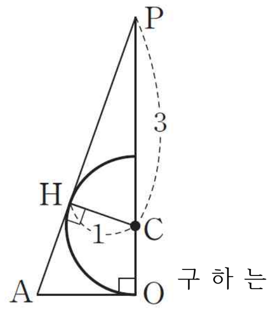
12) [정답]

$x^2+y^2+z^2-2z=0$에서 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$

구의 중심을 C라 하면 C$(0,\ 0,\ 1)$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 구의 접선 PA에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$PHC에서

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$



이때 $\triangle$PAO$\backsim\triangle$PCH이므로

$\overline{\mathrm{PO}}:\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{HC}}$

$4:2\sqrt{2}=\overline{\mathrm{OA}}:1$

$$\therefore\ \overline{OA}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

따라서 그림자는 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 그림자의 넓이는 $\pi(\sqrt{2})^2=2\pi$

13) [정답] 15

$x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-6=0$에서

$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$

이므로 중심의 좌표가 $(-1,\ -1,\ -1)$이고 반지름의 길이가 3인 구이다.

또, $x^2+y^2+z^2-4x-10y-2z+a=0$

$(x-2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=30-a$이므로 중심의 좌표가 $(2,\ 5,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{30-a}$인 구이다.

두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(2+1)^2+(5+1)^2+(1+1)^2}=7$

$0<\sqrt{30-a}<6$이므로 두 구가 만나지 않으려면

$3+\sqrt{30-a}<7,\ \sqrt{30-a}<4$

$0<30-a<16 \qquad \therefore\ 14<a<30$

따라서 구하는 자연수 a는 15, 16, 17, $\cdots$, 29의 15개이다.

14) [정답] 228

$x^2+y^2+z^2+kx-6y+10z+18=0$에서

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y-3)^2+(z+5)^2=\frac{k^2}{4}+16 \quad \cdots\cdots ㉠$$

xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 $z=0$을 ㉠에 대입하면

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{k^2}{4}-9$$

yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 $x=0$을 ㉠에 대입하면

$(y-3)^2+(z+5)^2=16$

즉, $S=\left(\frac{k^2}{4}-9\right)\pi,\ S'=16\pi$이므로

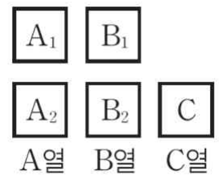
$$\left(\frac{k^2}{4}-9\right)\pi:16\pi=3:1$$

$$48\pi=\left(\frac{k^2}{4}-9\right)\pi \quad \therefore\ k^2=228$$

15) **정답** 36

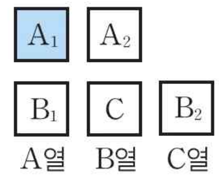
[풀이]

오른쪽 그림과 같이 1부 공연에 다섯 명의 학생이 앉은 좌석을 각각 $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ C$라 하자.



(ⅰ) 1부 공연 때 A열에 앉은 학생 중에서 한 명이 2부 공연에서도 A열에 앉는 경우

A_1에 앉았던 학생이 A열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.



이때 A_1과 A_2, B_1는 자리를 바꿀 수 있고, 같은 열에 앉은 학생들끼리도 자리를 바꿀 수 있으므로 가능한 방법의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!=16$

(ⅱ) 1부 공연 때 B열에 앉은 학생 중에서 한 명이 2부 공연에서도 B열에 앉는 경우

B_1에 앉았던 학생이 B열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.

따라서 가능한 방법의 수는 (ⅰ)과 같이

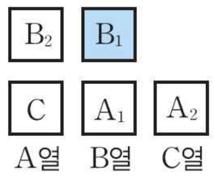
$2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!=16$

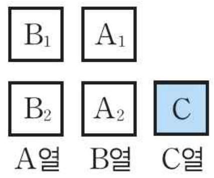
(ⅲ) 1부 공연 때 C열에 앉은 학생 한 명이 2부 공연에서도 C열에 앉는 경우

C에 앉았던 학생이 C열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.

이때 A_1과 A_2, B_1과 B_2는 자리를 바꿀 수 있으므로 가능한 방법의 수는

$2!\cdot 2!=4$





이상에서 구하는 방법의 수는

$16+16+4=36$

16) **정답** 36번째

[풀이]

각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수는 다음의 숫자들을 나열하여 만들 수 있다.

4, 0, 0, 0 또는 3, 1, 0, 0 또는 2, 2, 0, 0 또는 2, 1, 1, 0 또는 1, 1, 1, 1

(ⅰ) 4, 0, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ⅱ) 3, 1, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ⅲ) 2, 2, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

(ⅳ) 2, 1, 1, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ⅴ) 1, 1, 1, 1로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

1

이상에서 각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$4+12+6+12+1=35$

따라서 구하는 자연수는 36번째 수이다.

17) **정답** 6

지우와 혜리 둘 다 3문제씩 맞히기 위해서는 3번의 정답은 반드시 3이어야 한다.

따라서 지우는 3번 문제를 제외한 나머지 4개의 문제 중에서 2문제를 맞히고, 혜리는 3번 문제와 지우가 맞힌 2문제를 제외한 나머지 2문제 중에서 2문제를 맞혀야 하므로 구하는 경우의 수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_2=6\cdot 1=6$

18) **정답** ⑤

[풀이]

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개의 수 중에서 4개를 뽑으면 그 중에 가장 큰 수는 집합 A의 원소가 된다.

나머지 3개의 수 중에서 집합 A의 다른 한 원소를 택하면 집합 B의 두 원소가 정해지므로 구하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

${}_7C_4\cdot{}_3C_1=35\cdot 3=105$

19) **정답** 7

$10\times\frac{4}{5}=8$(명)이므로 8명 이상 참석해야 동아리 활동을 진행할 수 있다.

(ⅰ) 8명이 참석할 확률은 ${}_{10}C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{45}{2^{10}}$

(ⅱ) 9명이 참석할 확률은 ${}_{10}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{10}{2^{10}}$

(ⅲ) 10명이 참석할 확률은 ${}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{2^{10}}$

이상에서 동아리 활동이 진행될 확률은

$\frac{45}{2^{10}}+\frac{10}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}=\frac{56}{2^{10}}=\frac{7}{2^7}$

$\therefore\ n=7$

20) **정답** 0

[풀이]

주사위를 한 번 던질 때, 6의 약수가 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(k)={}_{60}C_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{60-k}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 60)$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{30}\{\mathrm{P}(2k-1)-\mathrm{P}(2k)\}$$

$$=\{\mathrm{P}(1)-\mathrm{P}(2)\}+\{\mathrm{P}(3)-\mathrm{P}(4)\}+\cdots+\{\mathrm{P}(59)-\mathrm{P}(60)\}$$

$$=\left\{{}_{60}C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{59}-{}_{60}C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{58}\right\}$$

$$+\left\{{}_{60}C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^{57}-{}_{60}C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{56}\right\}$$

$$+\cdots+\left\{{}_{60}C_{59}\left(\frac{2}{3}\right)^{59}\left(\frac{1}{3}\right)^1-{}_{60}C_{60}\left(\frac{2}{3}\right)^{60}\left(\frac{1}{3}\right)^0\right\}$$

$$={}_{60}C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-\left\{{}_{60}C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-{}_{60}C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{59}\right.$$

$$\left.+{}_{60}C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{58}-\cdots+{}_{60}C_{60}\left(\frac{2}{3}\right)^{60}\left(\frac{1}{3}\right)^0\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-\sum_{k=0}^{60}{}_{60}C_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(-\frac{1}{3}\right)^{60-k}$$

$$=\left(\frac{1}{30}\right)^{60}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^{60}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-\left(\frac{1}{3}\right)^{60}=0$$

21) **정답** ⑤

$y=\log_5 x+2$로 놓으면 $y-2=\log_5 x$ $\quad\therefore\ x=5^{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=5^{x-2}$ $\quad\therefore\ g(x)=5^{x-2}$

① $g(a)+g(-a)=5^{a-2}+5^{-a-2}=5^{-2}(5^a+5^{-a})$

② $g(a)-g(-a)=5^{a-2}-5^{-a-2}=5^{-2}(5^a-5^{-a})$

③ $g(a)+g\left(\frac{1}{a}\right)=5^{a-2}+5^{\frac{1}{a}-2}=5^{-2}\left(5^a+5^{\frac{1}{a}}\right)$

④ $g(a)g\left(\frac{1}{a}\right)=5^{a-2}\cdot 5^{\frac{1}{a}-2}=5^{a+\frac{1}{a}-4}$

⑤ $g(a)g(-a)=5^{a-2}\cdot 5^{-a-2}=5^{-4}=\frac{1}{625}$

22) **정답** 26

$(g\circ g\circ g)(k)=3$에서 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$(f\circ f\circ f)(3)=k$

이때 $f(3)=24-2\cdot 3=18$, $f(18)=1-\log_3(18-9)=-1$,

$f(-1)=24-2\cdot(-1)=26$이므로

$k=(f\circ f\circ f)(3)=f(f(f(3)))=f(f(18))$

$=f(-1)=26$

23) **정답** 1

$\triangle\mathrm{BCD}\equiv\triangle\mathrm{B'CD}$에서 $\angle\mathrm{ACB}=2\theta$이고, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{5^2-3^2}=4$이므로

$$\cos 2\theta=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\ \cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}=\frac{1+\frac{4}{5}}{2}=\frac{9}{10}$$

따라서 $p=10$, $q=9$이므로

$p-q=1$

24) **정답** 8

점 $\mathrm{P}(4\sin\theta,\ 2\sin\theta)$와 직선 $x\sin\theta+y\cos\theta-6=0$사이의 거리는

$$\frac{|4\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-6|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=|4\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-6|$$

$f(\theta)=4\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-6$으로 놓으면

$$f(\theta)=4\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\sin 2\theta-6$$

$$=\sin 2\theta-2\cos 2\theta-4$$

$$=\sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha)-4$$

(단, $\sin\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$)

이때 $-1 \le \sin(2\theta+\alpha) \le 1$ 이므로

$$-\sqrt{5}-4 \le \sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha)-4 \le \sqrt{5}-4$$

즉 $-\sqrt{5}-4 \le f(\theta) \le \sqrt{5}-4$ 이므로

$$4-\sqrt{5} \le |f(\theta)| \le 4+\sqrt{5}$$

따라서 $M=4+\sqrt{5}$, $m=4-\sqrt{5}$ 이므로

$$M+m=8$$

25) 정답 ③

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

$f'(x)=0$ 에서 $1-\ln x=0$

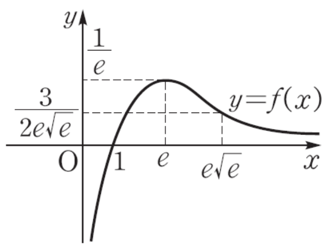
$\ln x=1$ $\qquad \therefore\ x=e$

$f''(x)=0$ 에서 $2\ln x-3=0$

$\ln x=\dfrac{3}{2}$ $\qquad \therefore\ x=e\sqrt{e}$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}$	↘

또 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x}=-\infty$ 이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 치역은 $\left\{y \,\middle|\, y \le \dfrac{1}{e}\right\}$이다.

ㄴ. 점근선의 방정식은 x축, y축, 즉 $y=0$, $x=0$ 이다.

ㄷ. $f(1)=0$, $f(e)=\dfrac{1}{e}$ 이므로 두 점 A, B는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이다.

이때 $x \le e\sqrt{e}$ 에서 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록한 모양이므로 $\overline{\mathrm{AB}}$는 $y=f(x)$의 그래프의 아래쪽에 있다.

즉, $\overline{\mathrm{AB}}$는 부등식 $y \le f(x)$의 영역에 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

26) 정답 $\dfrac{1}{2e}$

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

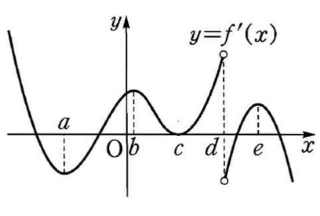
$f'(x)=0$ 에서 $\quad \ln x=\dfrac{1}{2}$ $\qquad \therefore\ x=\sqrt{e}$

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{2e}$	↘

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}$ 이다.

27) 정답 4

오른쪽 그림과 같이 a, b, c, d, e를 정하고 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.



x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$

$x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 4이다.

28) 정답 5

방정식 $\dfrac{g'(x)}{f'(x)}+\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=2$의 양변에 $f'(x)g'(x)$를 곱하여 정리하면

$\{f'(x)\}^2-2f'(x)g'(x)+\{g'(x)\}^2=0$

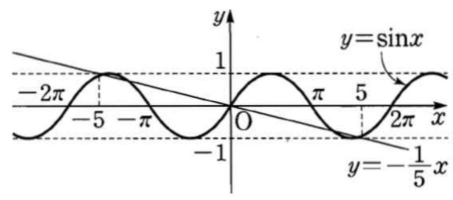
$\{f'(x)-g'(x)\}^2=0$

$\therefore\ f'(x)-g'(x)=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠ $\qquad$ • 30 %

$f(x)-g(x)=\dfrac{1}{10}x^2-\cos x$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-g'(x)=\dfrac{1}{5}x+\sin x \cdots\cdots$ ㉡ $\qquad$ • 20 %

㉠, ㉡에서 $\dfrac{1}{5}x+\sin x=0$ 이고, 이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=-\dfrac{1}{5}x$의 교점의 개수와 같으므로 다음 그림에서 5개다. $\qquad$ • 50 %



29) 답 ③

[해설] $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AD}+(1-k)\overrightarrow{AG}$에서

$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AG}=k(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG})$

$\therefore \overrightarrow{GP}=k\overrightarrow{GD}$

$0\le k\le 1$에서 점 P의 자취는 선분 GD이므로

$\overline{GD}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

30) 답 $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

[해설]

$\overrightarrow{CA}=(1,-2,1)$, $\overrightarrow{CB}=(2,2,-1)$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{1\times2+(-2)\times2+1\times(-1)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{-3}{3\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{30}}{6}\ (\because 0\le\theta\le\pi)$$

31) 답 $\dfrac{40}{27}$

[해설] $\overrightarrow{AB}=(2,\ -2,\ -1)$, $\overrightarrow{PQ}=(x-1,\ y,\ z+1)$.

두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ}$가 서로 평행하므로

$\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{AB}(k\ne0)$

$(x-1,\ y,\ z+1)=k(2,\ -2,\ -1)$

$\therefore x-1=2k,\ y=-2k,\ z+1=-k$

$\therefore x=2k+1,\ y=-2k,\ z=-k-1$

이때 $\overrightarrow{PQ}$는 단위벡터이므로

$|\overrightarrow{PQ}|=1$

$\sqrt{(2k)^2+(-2k)^2+(-k)^2}=1$

$|3k|=1, \qquad \therefore k=\pm\dfrac{1}{3}$

㉠에 $\therefore k=\pm\dfrac{1}{3}$를 대입하면

$x=\dfrac{5}{3},\ y=-\dfrac{2}{3},\ z=-\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{2}{3},\ z=-\dfrac{2}{3}$

이때 $xyz>0$이므로

$x=\dfrac{5}{3},\ y=-\dfrac{2}{3},\ z=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore xyz=\dfrac{40}{27}$

32) 답 ④

[해설] 구의 중심 $(1,\ 2,\ -1)$과 평면 $2x+y+2z-11=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|2+2-2-11|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{9}{3}=3$

구의 반지름의 길이는 5이므로 평면과 구가 만날 때 생기는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5^2-3^2}=4$

따라서 구하는 원의 넓이는 16π이다.

33) 답 ④

[해설] 구의 중심을 C라 하면 $C(4,\ 2,\ 3)$

이므로 $\overrightarrow{CA}=(a-4,\ b-2,\ c-3)$

주어진 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면 $\vec{n}=(1,\ 2,\ 2)$이고 $\overrightarrow{CA}/\!/\vec{n}$

이므로

$\overrightarrow{CA}=k\vec{n}\ (k\neq 0)$

즉 $a-4=k,\ b-2=2k,\ c-3=2k$이므로

$a=k+4,\ b=2k+2,\ c=2k+3$

이때 점 A가 주어진 평면 위에 있으므로

$a+2b+2c-5=0$

$k+4+2(2k+2)+2(2k+3)-5=0$

$\therefore k=-1$

따라서 $a=3,\ b=0,\ c=1$이므로

$a+b+c=4$

34) 답 1

[해설] 평면 α의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하면 평면 α가 점 $\left(0,\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$을 지나므로

$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}b+d=0 \qquad \therefore b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}d$

또 평면 α가 점 $(0,\ 0,\ 2)$를 지나므로

$2c+d=0 \qquad \therefore c=-\dfrac{1}{2}d$

구 $x^2+y^2+z^2=1$과 평면 α가 접하면 구의 중심 $(0,\ 0,\ 0)$과 평면 α 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1$

$\therefore d^2=a^2+b^2+c^2$

㉠, ㉡을 위의 식에 대입하면

$d^2=a^2+\dfrac{3}{4}d^2+\dfrac{1}{4}d^2,\ a^2=0$

$\therefore a=0$

따라서 평면 α의 방정식은

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}dy-\dfrac{1}{2}dz+d=0$, 즉 $\sqrt{3}y+z-2=0$

이므로 점 $(\sqrt{3},\ 0,\ 4)$와 평면 α 사이의 거리는

$\dfrac{|4-2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=1$

35) **정답** 12

다음 그림에서 짝수 2, 2, 4는 △에, 홀수 1, 3, 3, 3은 ○에 놓이게 된다.

○ △ ○ △ ○ △ ○

이때 3개의 숫자 2, 2, 4를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

4개의 숫자 1, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

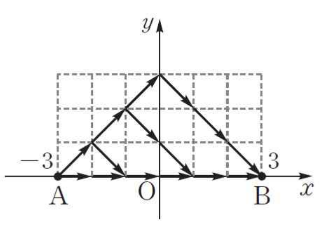
$\dfrac{4!}{3!}=4$

따라서 구하는 방법의 수는 $3\cdot 4=12$

36) **정답** 141

[풀이]

점 $A(-3,\ 0)$에서 점 $B(3,\ 0)$까지 6번만 점프하여 이동하려면 오른쪽 그림과 같이 길이가 1인 점프의 방향은 →, 길이가 $\sqrt{2}$인 점프의 방향은 ↗ 또는 ↘이어야 한다.



• 10 %

이때 점 $A(-3,\ 0)$에서 점 $B(3,\ 0)$까지 이동하는 방법은 다음과 같다.

(ⅰ) →, →, →, →, →, →로 점프하는 경우의 수는

1

(ⅱ) ↗, ↘, →, →, →, →로 점프하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{4!}=30$

(ⅲ) ↗, ↗, ↘, ↘, →, →로 점프하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=90$

(ⅳ) ↗, ↗, ↗, ↘, ↘, ↘로 점프하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!\cdot 3!}=20$

이상에서 구하는 방법의 수는

$1+30+90+20=141$

37) **정답** ③

X에서 Y로의 함수의 개수는 $\ {}_5\Pi_3=5^3=125$

X에서 Y로의 함수 중 $f(2)=2$인 함수의 개수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수의 개수는 $125-25=100$

38) **정답** ⑤

깃발을 한 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_1=3$

깃발을 두 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_2=3^2$

같은 방법으로 깃발을 세 번, 네 번, 다섯 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_3\Pi_3$, ${}_3\Pi_4$, ${}_3\Pi_5$이므로 구하는 신호의 개수는

$3+3^2+3^3+3^4+3^5=\dfrac{3(3^5-1)}{3-1}=363$

39) **정답** (1) 28

(1) 2를 제외한 8개의 수 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_8C_2=28$

40) **정답** 1500

[풀이]

집합 X의 5개의 원소 중에서 치역의 원소가 되는 3개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_3=10$

이때 치역의 원소를 $a,\ b,\ c$라 하면 $a,\ b,\ c$ 중에서 함숫값을 택하는 경우는

$a,\ a,\ a,\ b,\ c$ 또는 $a,\ a,\ b,\ b,\ c$

의 2가지이다.

(ⅰ) 함숫값이 $a,\ a,\ a,\ b,\ c$인 함수의 개수는

${}_3C_1\cdot\dfrac{5!}{3!}=60$

(ⅱ) 함숫값이 $a,\ a,\ b,\ b,\ c$인 함수의 개수는

${}_3C_2\cdot\dfrac{5!}{2!2!}=90$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는

$10\cdot(60+90)=1500$