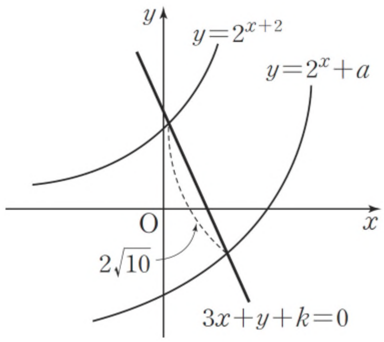
1. 좌표평면 위의 두 곡선

$$y=2^{x+2},\ y=2^x+a\ (a<0)$$

가 직선 $3x+y+k=0$과 각각 한 점에서 만나고, 이 두 점 사이의 거리가 실수 k의 값에 관계없이 항상 $2\sqrt{10}$이다. 상수 a의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2



2. 두 함수 $y=2^x-3,\ y=2^{-x+2}-20$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB의 길이를 l이라 할 때, 2^l의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

3. 자연수 k에 대하여 직선 $y=k$가 지수함수 $y=2^x$의 그래프와 만나는 점의 x좌표를 α라 하고, 직선 $y=2k$가 지수함수 $y=8^x$의 그래프와 만나는 점의 x좌표를 β라 하자. $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{5}{2}$일 때, k의 값을 구하시오.

4. 좌표평면에서 함수

$$y=a^{-x+3}-1\ (a>0,\ a\neq 1)$$

의 그래프가 두 부등식

$$|x|\le 1,\ |y-5|\le 2$$

를 동시에 만족시키는 영역을 지나도록 하는 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{2}$
④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{2}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)+9x}{2x}$의 값을 구하시오. [3점]

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}+a}{x} & (x\neq 0)\\ b & (x=0)\end{cases}$$

가 $x=0$에서 연속이 되도록 두 상수 $a,\ b$의 값을 정할 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② $e-1$ ③ 2
④ e ⑤ 3

7. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{3x}-e^3}{x-1} & (x\neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① $3e$ ② e^2 ③ $3e^2$
④ e^3 ⑤ $3e^3$

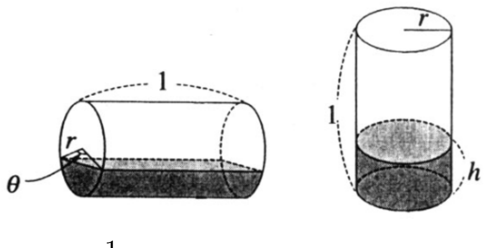
8. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\ln x+3 & (x>1) \\ e^{x-1}+1 & (x\leq 1) \end{cases},\ g(x)=2x^2+ax$$

에 대하여 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① -10 ② -11 ③ -12
④ -13 ⑤ -14

9. 반지름의 길이가 r이고 높이가 1인 원기둥에 물이 들어 있다. 원기둥을 수평으로 뉘었을 때 수면과 옆면이 만나서 이루는 현에 대한 중심각을 θ라 하자. 원기둥을 세웠을 때 수면의 높이 h를 θ로 표시하면? (단, $0<\theta<\pi$, $0<h<\dfrac{1}{2}$)



① $h=\dfrac{1}{2\pi}\theta$

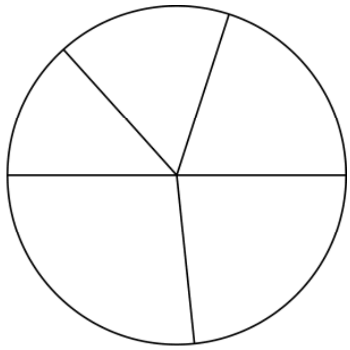
② $h=\dfrac{1}{2\pi}\sin\theta$

③ $h=\theta-\sin\theta$

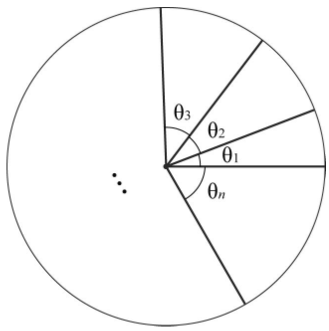
④ $h=\dfrac{1}{2\pi}(\theta+\sin\theta)$

⑤ $h=\dfrac{1}{2\pi}(\theta-\sin\theta)$

10. 그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$이다. 이때 k의 값을 구하시오.

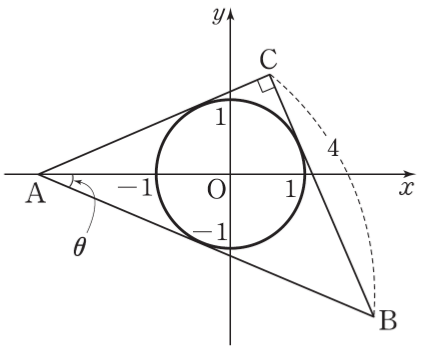


11. 넓이가 A인 원을 중심각이 θ_1, θ_2, θ_3, $\cdots$, θ_n인 n개의 부채꼴로 나누고 중심각이 θ_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$인 부채꼴의 넓이를 A_k이라 하자. 수열 $\{\theta_n\}$이 등차수열을 이루고, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\theta_k=2\pi$이다. $A_1+A_n=\dfrac{1}{5}A$일 때, n의 값은?



① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

12. 그림과 같이 꼭짓점 A가 x축 위에 있고 $\angle \mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 내접원의 방정식이 $x^2+y^2=1$이다. $\overline{\mathrm{BC}}=4$이고 $\angle \mathrm{OAB}=\theta$라 할 때, $\cot\theta$의 값은? (단, O은 원점이다.)



① 2 ② $\dfrac{17}{8}$ ③ $\dfrac{9}{4}$
④ $\dfrac{19}{8}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$의 값은?

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2
④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

14. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{\tan 3x+1}-1}$의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ 2
④ $\dfrac{7}{3}$ ⑤ $\dfrac{8}{3}$

15. 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=4,\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3+2x}=3$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

16. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x\tan 4x}{x^2} & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$$

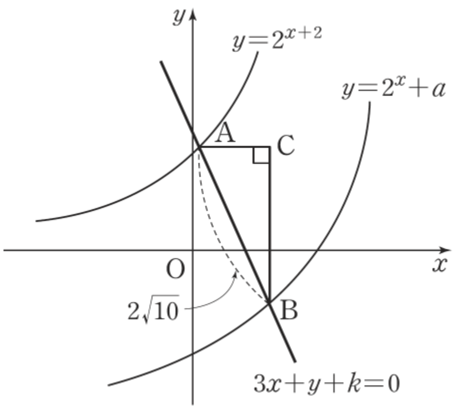
이 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

정답 및 해설

1) <답> ③

직선 $3x+y+k=0$이 두 곡선 $y=2^{x+2}$, $y=2^x+a$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선 위의 한 점 C를 $\angle ACB=90°$가 되도록 잡는다.



직선 $3x+y+k=0$의 기울기가 -3이므로

$\overline{AC}=t$라 하면 $\overline{CB}=3t$이고,

$t^2+(3t)^2=(2\sqrt{10})^2$에서

$10t^2=40$, $t^2=4$

$t>0$이므로 $t=2$

$\therefore\ \overline{AC}=2$, $\overline{CB}=6$

곡선 $y=2^x+a$는 곡선 $y=2^{x+2}$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=2^{x+2}$ 위의 점 A를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점은 C이고, 점 C를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점은 곡선 $y=2^x+a$ 위에 놓이므로 점 B가 된다.

즉, $\overline{CB}=|a|$이므로 $|a|=6$에서

$a=-6$ ($\because\ a<0$)

2) <답> ⑤

두 함수 $y=2^x-3$, $y=2^{-x+3}-20$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표를 각각 $A(\alpha,\ 0)$, $B(\beta,\ 0)$이라 하면

$2^\alpha-3=0$, $2^{-\beta+2}-20=0$에서 $2^\alpha=3$, $2^\beta=\dfrac{1}{5}$

$l=\overline{AB}=\alpha-\beta(\because\ \alpha>\beta)$이므로

$2^l=2^{\alpha-\beta}=\dfrac{2^\alpha}{2^\beta}=\dfrac{3}{\frac{1}{5}}=15$

3) <답> 32

$2^\alpha=k$, $8^\beta=2k$ …… ㉠

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{5}{2}$에서 $\alpha=\dfrac{5}{2}\beta$를 $2^\alpha=k$에 대입하면

$2^{\frac{5}{2}\beta}=k$에서 $2^\beta=k^{\frac{2}{5}}$에서 $8^\beta=k^{\frac{6}{5}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$2k=k^{\frac{6}{5}}$, $(2k)^5=k^6$

k는 자연수이므로

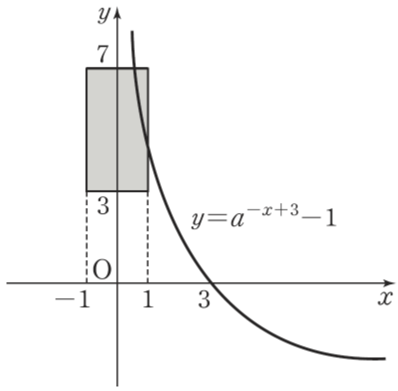
$k=2^5=32$

4) <답> ①

$|x|\le 1 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$

$|y-5|\le 2 \Leftrightarrow 3\le y\le 7$

이므로 두 부등식 $|x|\le 1$, $|y-5|\le 2$를 동시에 만족시키는 영역은 다음과 같다.



함수 $y=a^{-x+3}-1$의 그래프는 항상 점 $(3,\ 0)$을 지나므로 주어진 부등식의 영역을 지나려면 x의 값이 증가할 때, y의 값이 감소해야 한다. 즉, $a>1$이어야 한다.

함수 $y=a^{-x+3}-1$의 그래프가 점 $(1,\ 7)$을 지날 때,

$7=a^2-1$에서 $a^2=8$

$\therefore\ a=2\sqrt{2}$ ($\because\ a>1$)

함수 $y=a^{-x+3}-1$의 그래프가 점 $(-1,\ 3)$을 지날 때,

$3=a^4-1$에서

$a^4=4$

$a^2=2$

$\therefore\ a=\sqrt{2}$ ($\because\ a>1$)

따라서 함수 $y=a^{-x+3}-1$의 그래프가 주어진 부등식의 영역을 지나기 위한 a의 값의 범위는

$\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$

이므로 a의 최댓값은 $2\sqrt{2}$, 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

따라서 a의 최댓값과 최솟값의 합은 $3\sqrt{2}$이다.

5) <답> 6

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)+9x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{2x}+\lim_{x\to0}\frac{9x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{3}{2}\right\}+\frac{9}{2}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\ln(1+t)}{t}\times\frac{3}{2}\right\}+\frac{9}{2}$$

$$=1\times\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=6$$

6) <답> ①

출제의도 함수의 연속의 정의를 이용하여 미지의 상수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}+a}{x} & (x\neq0)\\ b & (x=0)\end{cases}$가 $x=0$에서 연속이 되려면 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이어야 한다.

$\lim_{x\to0}\dfrac{e^{2x}+a}{x}=b$에서

$x\to0$일 때, (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(e^{2x}+a)=1+a=0$에서 $a=-1$

$$\therefore\ b=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2$$

$=\lim_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{t}\cdot2$ ($\because$ $2x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때, $t\to0$)

$=1\cdot2$

$=2$

$\therefore\ a+b=(-1)+2=1$

7) <답> ⑤

함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-e^3}{x-1} & (x\neq1)\\ a & (x=1)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to1}\dfrac{e^{3x}-e^3}{x-1}=a$이므로

$$a=\lim_{x\to1}\frac{(e^x-e)(e^{2x}+e^x\cdot e+e^2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}\cdot3e^2$$

$=\lim_{t\to0}\dfrac{e^{t+1}-e}{t}\cdot3e^2$ ($\because$ $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때, $t\to0$)

$$=\lim_{t\to0}\frac{e(e^t-1)}{t}\cdot3e^2$$

$$=3e^2$$

8) <답> ①

함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1-0}g(f(x))=\lim_{x\to1+0}g(f(x))$$
$$=g(f(1))$$

이어야 한다.

(i) $\lim_{x\to1-0}g(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$x\to1-0$일 때, $t\to2-0$

$$\therefore\ \lim_{x\to1-0}g(f(x))=\lim_{t\to2-0}g(t)$$
$$=2\times2^2+2a$$
$$=8+2a$$

(ii) $\lim_{x\to1+0}g(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$x\to1+0$일 때, $t\to3+0$

$$\therefore\ \lim_{x\to1+0}g(f(x))=\lim_{t\to3+0}g(t)$$
$$=2\times3^2+3a$$
$$=18+3a$$

(iii) $g(f(1))=g(2)$
$$=2\times2^2+2a$$
$$=8+2a$$

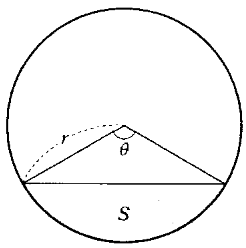
따라서 (i), (ii), (iii)에서

$18+3a=8+2a$

$\therefore\ a=-10$

9) <답> ⑤

오른쪽 그림에서 원기둥을 수평으로 뉘었을 때 수면과 옆면이 만나서 이루는 활꼴 부분의 넓이 S는



$$S=\frac{1}{2}r^2\theta-\frac{1}{2}r^2\sin\theta$$

한편 원기둥에 들어 있는 물의 부피 V를 두 경우에 대해 구해 보면

$$V=S\times1=\pi r^2h,\ \frac{1}{2}r^2\theta-\frac{1}{2}r^2\sin\theta=\pi r^2h$$

$\therefore\ h=\dfrac{1}{2\pi}(\theta-\sin\theta)$

10) <답> 60

5개의 부채꼴의 넓이를 작은 것부터 차례로

$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d\ (d>0)$라 하면

5개의 부채꼴의 넓이의 합은 원의 넓이이므로

$5a=15^2\pi \quad \therefore\ a=45\pi$

또, 주어진 조건으로부터

$(a+2d)=2(a-2d)$ 에서 $d=\dfrac{a}{6}=\dfrac{15\pi}{2}$

따라서 가장 큰 부채꼴의 넓이는

$a+2d=45\pi+2\cdot\dfrac{15}{2}\pi=60\pi \quad \therefore\ k=60$

11) <답> ③

[출제의도] 등차수열의 합의 성질 이해하기

$\{\theta_n\}$이 등차수열이므로 A_n 도 등차수열이다.

$$\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{n(A_1+A_n)}{2}=A$$

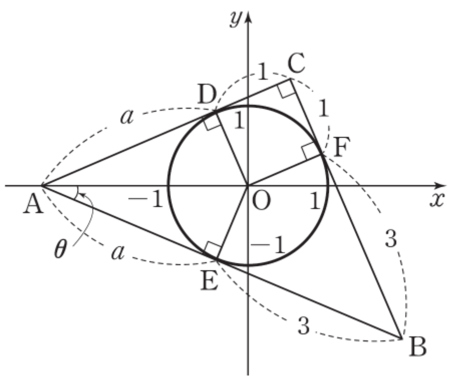
$A_1+A_n=\dfrac{1}{5}A$ 이므로 $n=10$

12) <답> ①

내접원이 삼각형 ABC의 세 변과 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자.

$\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{CD}}=1$ 이므로

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BE}}=3$



$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=a$라 하면 피타고라스의 정리에 의하여

$(a+3)^2=(a+1)^2+4^2$

$a^2+6a+9=a^2+2a+1+16$

$4a=8$

$\therefore\ a=2$

따라서 $\tan\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{OE}}}{\overline{\mathrm{AE}}}=\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\cot\theta=2$

13) <답> ②

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{3x}{2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin 2x}\times\lim_{x\to0}\frac{3x}{2x}$$

$$=\lim_{s\to0}\frac{e^{s}-1}{s}\times\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}\times\lim_{x\to0}\frac{3x}{2x}$$

$$=1\times1\times\frac{3}{2}$$

$$=\frac{3}{2}$$

14) <답> ①

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{\tan 3x+1}-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)(\sqrt{\tan 3x+1}+1)}{\tan 3x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times\frac{3x}{\tan 3x}\times\frac{2x}{3x}\times(\sqrt{\tan 3x+1}+1)\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times\lim_{x\to0}\frac{3x}{\tan 3x}\times\lim_{x\to0}\frac{2x}{3x}\times\lim_{x\to0}(\sqrt{\tan 3x+1}+$$

$$=\lim_{s\to0}\frac{\ln(1+s)}{s}\times\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan t}\times\frac{2}{3}\times2$$

$$=1\times1\times\frac{2}{3}\times2$$

$$=\frac{4}{3}$$

15) <답> ③

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x^2}{\sin^2 x}\times\frac{f(x)}{x^2}\times(1+\cos x)\right\}$$

$$=4$$

에서 $x\to0$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $f(x)=x^2(ax+b)\ (a\neq0)$로 놓을 수 있다.

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\left\{\frac{x^2}{\sin^2 x}\times\frac{f(x)}{x^2}\times(1+\cos x)\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\times\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\times\lim_{x\to0}(1+\cos x)$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\times\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\times\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$

$$=1^2\times\lim_{x\to 0}\frac{x^2(ax+b)}{x^2}\times 2$$

$$=2\lim_{x\to 0}(ax+b)$$

$$=2b=4$$

$\therefore\ b=2$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3+2x}=3$에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(ax+b)}{x^3+2x}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{1+\frac{2}{x^2}}=3$$

$\therefore\ a=3$

따라서 $f(x)=x^2(3x+2)$이므로

$f(1)=5$

16) <답> ①

함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x\tan 4x}{x^2} & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$ 이 $x=0$에서 연속

이 되려면

$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이어야 한다.

$$\therefore\ a=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\tan 4x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{\tan 4x}{4x}\times 8\right)$$

$$=8\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{4x}$$

$$=8\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{s\to 0}\frac{\tan s}{s}$$

$$=8\times 1\times 1$$

$$=8$$