정답 & 해설

[난문현답 기출 정답]

1. ①
2. ②
3. ②
4. ①
5. ⑤
6. ④
7. ②
8. 45
9. 14
10. ⑤

[추가 과제 정답]

1) **정답** 2

$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$에서 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+2}{2a_n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a_n}$

$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}$ • 30%

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}$, 공차가 $\dfrac{1}{2}$인 등차수열이므로

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{3}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3n-1}{6}$

$\therefore a_n=\dfrac{6}{3n-1}$ • 50%

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} na_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n}{3n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6}{3-\dfrac{1}{n}}=2$ • 20%

2) **정답** ④

$a_{n+1}=a_n+2^n$의 양변에 n 대신 $1,2,3,\cdots,n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}a_2&=a_1+2^1\\a_3&=a_2+2^2\\a_4&=a_3+2^3\\&\vdots\\+\,)\ a_n&=a_{n-1}+2^{n-1}\end{aligned}$$

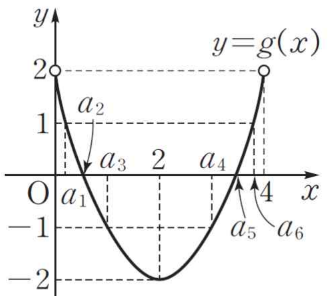
$$\begin{aligned}a_n&=a_1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}\\&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-4}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-4}{2^n-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\dfrac{4}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2^n}}=4\end{aligned}$$

3) **정답** ③

$g(x)=x^2-4x+2$라 하면

$g(x)=(x-2)^2-2$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

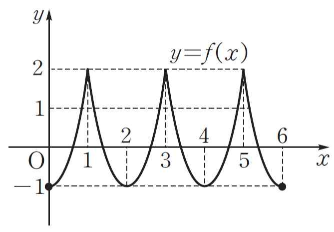


$g(x)=-1,\ 0,\ 1$을 만족시키는 x에서 $f(x)$가 불연속이므로 이때 x의 값을 차례대로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,a_6\,(a_1<a_2<\cdots<a_6)$이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6\\&=(a_1+a_6)+(a_2+a_5)+(a_3+a_4)\\&=4+4+4=12\end{aligned}$$

4) **정답** 15

함수 $y=f(x)$의 그래프는 조건 (나)에서 $x=1$에 대하여 대칭이고, 조건 (다)에서 y축에 대하여 대칭이므로 $0\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $f(x)=0,\ 1,\ 2$를 만족시키는 x에서 $y=[f(x)]$가 불연속이다. $f(x)=0$, $f(x)=1$을 만족시키는 x의 값은 각각 6개, $f(x)=2$를 만족시키는 x의 값은 3개이므로 구하는 x의 값의 개수는 15이다.

5) **정답** ④

① $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=3$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{3-3}{h}=0$이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

② $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|^3-0}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h^2\cdot|h|}{h}=\lim_{h\to0}h|h|=0\end{aligned}$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

③ $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

④ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0+}\frac{h+|h|-0}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{h+h}{h}=2\\\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0-}\frac{h+|h|-0}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{h-h}{h}=0\end{aligned}$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

⑤ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=1$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0+}\frac{(h+1)^2-1}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to0+}(h+2)=2\\\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0-}\frac{(2h+1)-1}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{2h}{h}=2\end{aligned}$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

6) **정답** ③

① 함수 $f(x)$는 $x=3$, $x=4$에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개다.

② 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점은 $x=2$, $x=3$, $x=4$일 때의 3개다.

③ $f'(x)=0$인 점은 구간 $(0,\ 2)$에서 2개 존재하고, 구간 $(2,\ 3)$에서 1개 존재하므로 모두 3개다.

④ $x=0$에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $f'(0)>0$이다.

⑤ $\lim\limits_{x\to3+}f(x)=\lim\limits_{x\to3-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to3}f(x)$의 값이 존재한다.

7) **정답** 5

함수 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & (1\le x<2)\\ 0 & (0\le x<1)\end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)$에서

$1+a+b=0\quad \therefore a+b=-1$ ……㉠

또, $f'(1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)^2+a(1+h)+b-(1+a+b)}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+(a+2)h}{h}=\lim_{h\to0+}(h+a+2)=a+2\end{aligned}$$

$\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{0-0}{h}=0$

에서 $a+2=0 \qquad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore a^2+b^2=5$

8) **정답** ①

$f(x)=x^3+ax,\ g(x)=2x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=4x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^3+at=2t^2+4$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2+a=4t$

$\therefore a=4t-3t^2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$t^3-t^2+2=0,\quad (t+1)(t^2-2t+2)=0$

$\therefore t=-1\ (\because t^2-2t+2>0)$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면 $a=-7$

9) **정답** ①

두 곡선 $f(x)=x^3,\ g(x)=2ax^2-bx$가 모두 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$f(1)=g(1)$에서 $\qquad 1=2a-b$ …… ㉠

또 $f'(x)=3x^2,\ g'(x)=4ax-b$이고, 점 $(1,\ 1)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(x)g'(x)=-1$에서

$$3(4a-b)=-1 \quad \therefore 4a-b=-\frac{1}{3} \text{ …… ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{2}{3},\ b=-\dfrac{7}{3}$

$\therefore a+b=-3$

10) **정답** ①

$f(x)=x^3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

$\therefore f'(a)=3a^2$

따라서 점 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-a^3=3a^2(x-a) \qquad \therefore y=3a^2x-2a^3$

이때 점 Q의 좌표는 $(0,\ -2a^3)$이므로

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\cdot 2a^3\cdot a=a^4$$

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot a^3\cdot a=\frac{1}{2}a^4$$

$$\therefore \triangle\mathrm{OPQ} : \triangle\mathrm{PQR}=a^4 : \frac{1}{2}a^4=2:1$$

11) [정답] 최댓값 : 21, 최솟값 : 13

영지네 반 학생 전체의 집합을 U, 영어를 좋아하는 학생의 집합을 A, 수학을 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=35,\ n(A)=21,\ n(B)=27$

영어와 수학을 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로

$n(A\cap B)$의 최댓값은 M, 최솟값은 m이라 하면 $A\subset B$일 때,

$n(A\cap B)$가 최대이므로 $\qquad M=21$

또 $A\cup B=U$일 때, $n(A\cap B)$가 최소이므로

$21+27-m=35 \qquad \therefore m=13$

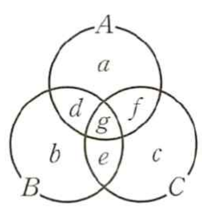
12) [정답] 12

오른쪽 그림과 같이 벤 다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$로 나타내면

$n(A\cup B\cup C)=65,\ n(A\triangle B)=36$

$n(B\triangle C)=38,\quad n(C\triangle A)=32$

이므로



$a+b+c+d+e+f+g=65$ …… ㉠

$a+f+b+e=36$ …… ㉡

$b+d+c+f=38$ …… ㉢

$a+d+c+e=32$ …… ㉣

㉡ + ㉢ + ㉣ 을 하면

$2(a+b+c+d+e+f)=106$

$\therefore a+b+c+d+e+f=53$ …… ㉤

㉠ − ㉤ 을 하면 $\quad g=12$

$\therefore n(A\cap B\cap C)=12$

13) [정답] 22

$x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right)=xy+8+2+\frac{16}{xy}$$

$$\geq 10+2\sqrt{xy\cdot\frac{16}{xy}}$$

$$=10+2\cdot 4=18$$

등호는 $xy=\dfrac{16}{xy}$일 때 성립하므로 $(xy)^2=16$에서

$xy=4\ (\because x>0,\ y>0)$

따라서 $a=4,\ b=18$이므로 $a+b=22$

14) [정답] 12

두 점 B, C의 좌표는 각각$(a,\ 0),\ (0,\ b)$이므로

$\triangle$OBC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}ab \quad \cdots ㉠$$

또 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$이 직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$$

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\frac{3}{b}}=2\sqrt{\frac{6}{ab}}$$

그런데 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}=1$이므로

$$1\geq 2\sqrt{\frac{6}{ab}}$$ (단, 등호는 $3a=2b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $1\geq 4\cdot\dfrac{6}{ab}$

$\therefore ab\geq 24 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $S=\dfrac{1}{2}ab\geq\dfrac{1}{2}\cdot 24=12$

따라서 $\triangle$OBC의 넓이의 최솟값은 12이다.

15) **정답** ④

(ⅰ) $f(1)=2,\ f(4)=6$인 경우

$f(2)$와 $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는

2 또는 3 또는 4 또는 5 또는 6

이고, $f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)$이어야 하므로

2, 3, 4, 5, 6의 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

또 $f(5)$와 $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

6 또는 7

이고, $f(4)\leq f(5)\leq f(6)$이어야 하므로 6, 7의 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

따라서 $f(1)=2,\ f(4)=6$인 함수 f의 개수는

$15\cdot 3=45$

(ⅱ) $f(1)=3,\ f(4)=4$인 경우

$f(2)$와 $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는

3 또는 4

이고, $f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)$이어야 하므로 3, 4의 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

또 $f(5)$와 $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

4 또는 5 또는 6 또는 7

이고 $f(4)\leq f(5)\leq f(6)$이어야 하므로 4, 5, 6, 7의 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

따라서 $f(1)=3,\ f(4)=4$인 함수 f의 개수는

$3\cdot 10=30$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는

$45+30=75$

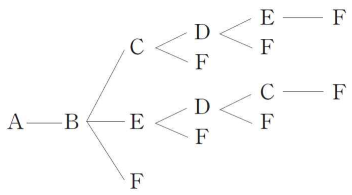
16) **정답** 21

구하는 항의 개수는 3개의 문자 $a,\ b,\ c$ 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$$

17) **정답** 28

주어진 팔면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B로 움직인 후 꼭짓점 F에 도착하는 경우를 구해 보면 다음과 같다.



같은 방법으로 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 C 또는 D또는 E로 움직인 후 꼭짓점 F에 도착하는 경우도 각각 7가지씩이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$7\cdot 4=28$

18) **정답** 90

19) **정답** 81

(ⅰ) 4개의 집합으로 분할하는 경우

네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 3개인 경우의 수는

$${}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{3!}=6\cdot5\cdot4\cdot1\cdot\frac{1}{6}=20$$

네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 2개, 2개인 경우의 수는

$${}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot5\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=45$$

이므로 $S(6,\ 4)=20+45+65$

(ⅱ) 5개의 집합으로 분할하는 경우

다섯 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 1개, 2개인 경우의 수는

$$S(6,\ 4)={}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{4!}$$

$$=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{24}=15$$

(ⅲ) 6개의 집합으로 분할하는 경우

여섯 집합의 원소가 각각 1개씩이므로

$S(6,\ 6)=1$

이상에서 구하는 방법의 수는

$65+15+1=81$

20) **정답** 186

세 정류장 A, B, C 중에서 승객이 내리는 2개의 정류장을 택하는 방법의 수는 ${}_3C_2=3$ • 20 %

6명을 2개의 조로 나눌 때, 각 조의 인원 수는

1, 5 또는 2, 4 또는 3, 3

(ⅰ) 승객을 1명, 5명으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1\cdot{}_5C_5=6\cdot1=6$

(ⅱ) 승객을 2명, 4명으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_4=15\cdot1=15$

(ⅲ) 승객을 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=10$$

이상에서 승객을 2개의 조로 나누는 방법의 수는

$6+15+10=31$ • 40 %

2개의 조를 2개의 정류장에 분배하는 방법의 수는

$2!=2$ • 20 %

따라서 구하는 방법의 수는 $3\cdot31\cdot2=186$ • 20 %

21) **정답** 4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n^2a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n}=2\cdot2=4$$

22) **정답** −3

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$이고 $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면

$b_n=a_n-c_n$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=-2$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+b_n}{a_n-2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+(a_n-c_n)}{a_n-2(a_n-c_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-c_n}{-a_n+2c_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{c_n}{a_n}}{-1+2\cdot\dfrac{c_n}{a_n}}=-3$$

23) **정답** ⑤

$a_n+a_{n+1}=n^2$ …… ㉠

$a_{n+1}+a_{n+2}=(n+1)^2$ …… ㉡

㉡-㉠을 하면 $a_{n+2}-a_n=(n+1)^2-n^2=2n+1$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}=2$$

24) **정답** 11

$\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{a_{k+1}-a_k}=2\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$에서

(ⅰ) $n=1$일 때, $\sqrt{a_2-a_1}=\frac{4}{3}$

(ⅱ) $n\geq2$일 때,

$$\sqrt{a_{n+1}-a_n}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_{k+1}-a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{a_{k+1}-a_k}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-2\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)=\frac{4}{3^n}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $\sqrt{a_2-a_1}=\frac{4}{3}$는 ㉠에서 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{a_{n+1}-a_n}=\frac{4}{3^n}$

$$\therefore a_{n+1}=a_n+\frac{16}{9^n}$$

앞의 식의 양변에 n대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2=a_1+\frac{16}{9}$$

$$a_3=a_2+\frac{16}{9^2}$$

$$a_4=a_3+\frac{16}{9^3}$$

⋮

$$+\ a_n=a_{n-1}+\frac{16}{9^{n-1}}$$

$$a_n=a_1+\frac{16}{9}+\frac{16}{9^2}+\frac{16}{9^3}+\cdots+\frac{16}{9^{n-1}}$$

$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{16}{9^k}=9+\frac{\dfrac{16}{9}\left\{1-\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}\right\}}{1-\dfrac{1}{9}}=11-2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{11-2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right\}=11$$

25) **정답** ②

주어진 식에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0\qquad\therefore f(0)=0$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-3xh-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-3xh}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-3x$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-3x$$

$$=f'(0)-3x=-3x-2$$

26) **정답** ②

$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0\qquad\therefore f(0)=0$

$f'(1)=3$이므로

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1)+f(h)-h-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}-1=3$$

즉, $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=4$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}-x$$
$$=4-x$$
$$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(4-x)dx$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+4x+C$$

그런데 $f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$이므로

$$f(-2)=-2-8=-10$$

27) **정답** ②

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_1^4 f(x)dx=\int_4^7 f(x)dx=\int_7^{10} f(x)dx=\int_{10}^{13} f(x)dx=2$$
$$\therefore\ \int_1^{13} f(x)dx=\int_1^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx$$
$$+\int_7^{10} f(x)dx+\int_{10}^{13} f(x)dx$$
$$=4\cdot 2=8$$

28) **정답** ⑤

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$이므로

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_5^6 f(x)dx=\int_9^{10} f(x)dx$$
$$=\cdots=\int_{2013}^{2014} f(x)dx$$
$$=\int_{2017}^{2018} f(x)dx$$

29) **정답** ①

$$\int_{-2}^2 \{f(x)\}^2 dx=\int_{-2}^2 (x+2)^2 dx$$
$$=\int_{-2}^2 (x^2+4x+4)dx$$
$$=2\int_0^2 (x^2+4)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2=2\cdot\frac{32}{3}=\frac{64}{3}$$
$$\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^2 (x+2)dx$$
$$=2\int_0^2 2dx$$
$$=2\Big[2x\Big]_0^2=2\cdot 4=8$$

따라서 $\int_{-2}^2\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-2}^2 f(x)dx\right)^2$에서

$$\frac{64}{3}=k\cdot 8^2 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{3}$$

30) **정답** 6

일차함수 $f(x)$를 $f(x)=ax+b$ ($a\neq 0$이고, a, b는 상수)로 놓자.

$\int_{-1}^1 xf(x)dx=3$에서

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx=\int_{-1}^1 (ax^2+bx)dx=2a\int_0^1 x^2dx$$
$$=2a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2a\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}a$$

즉 $\frac{2}{3}a=3$이므로 $a=\frac{9}{2}$

$\int_{-1}^1 x^2f(x)dx=-2$에서

$$\int_{-1}^1 x^2f(x)dx=\int_{-1}^1 (ax^3+bx^2)dx=2b\int_0^1 x^2dx$$
$$=2b\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2b\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}b$$

즉 $\frac{2}{3}b=-2$이므로 $\qquad b=-3$

따라서 $f(x)=\frac{9}{2}x-3$이므로 $\qquad f(2)=\frac{9}{2}\cdot 2-3=6$

31)답 ③

(ⅰ) $-2\le x<-1$일 때,

$[x]=-2$이므로 $y=-2x$

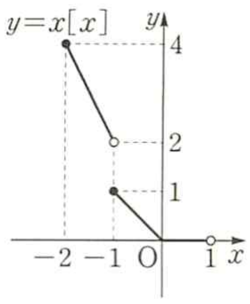
(ⅱ) $-1\le x<0$일 때,

$[x]=-1$이므로 $y=-x$

(ⅲ) $0\le x<1$일 때,

$[x]=0$이므로 $y=0$

따라서 $-2\le x<1$에서 함수 $y=x[x]$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역의 원소가 아닌 것은 2이다.



32) 답. ②

ㄱ. [반례] $A=\varnothing$이면 $f_A(x)=1$이다.

ㄴ. $x\in A$일 때, $f_A(x)+f_{A^c}(x)=2+1=3$

$x\notin A$일 때, $f_A(x)+f_{A^c}(x)=1+2=3$

따라서 $f_A(x)+f_{A^c}(x)=3$이므로

$f_{A^c}(x)=3-f_A(x)$

ㄷ. [반례]$x\in A\cap B$이면

$f_{A\cup B}(x)=2,\quad f_A(x)+f_B(x)=2+2=4$

$\therefore f_{A\cup B}(x)\neq f_A(x)+f_B(x)$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

33) [정답] ④

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=10 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$a_{10}=a+9d=24 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6,\ d=2$

$\therefore a_n=6+(n-1)\cdot 2=2n+4$

$\therefore a_{15}=2\cdot 15+4=34$

34) [정답] ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}=50+9d=23,\quad 9d=-27\quad \therefore d=-3$

$\therefore a_n-50+(n-1)\cdot(-3)=-3n+53$

$a_n<0$에서 $\quad -3n+53<0 \quad \therefore n>\frac{53}{3}=17.\times\times\times$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제17항까지 양수이고, 제18항부터 음수이다.

$a_{17}=2,\ a_{18}=-1,\ a_{30}=-37$이므로

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|$$
$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{17})-\underbrace{(a_{18}+a_{19}+a_{20}+\cdots+a_{30})}_{\text{제18항부터제30항까지의 항수는 }30-18+1=13}$$
$$=\frac{17(50+2)}{2}-\frac{13\{-1+(-37)\}}{2}$$
$$=442+247=689$$

35) **정답** ⑤

7개의 문자 A, A, A, B, B, C, D를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{7!}{3!\cdot 2!}=420$$

C, D를 한 문자 T로 생각하여 6개의 문자 A, A, A, B, B, T를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{6!}{3!\cdot 2!}=60$$

이때 C와 D가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$이므로 C, D가 이웃하도록 나열하는 방법의 수는

$$60\cdot 2=120$$

따라서 구하는 방법의 수는 $420-120=300$

36) **정답** 136

(ⅰ) $f(3)=1$인 경우

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 존재하지 않으므로 f는 함수가 아니다.

(ⅱ) $f(3)=3$인 경우

$f(1)$과 $f(2)$가 될 수 있는 수는

4 또는 5 또는 6

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

1 또는 2

따라서 f의 개수는

$${}_3\Pi_2 \cdot {}_2\Pi_3 = 3^2 \cdot 2^3 = 72$$

(ⅲ) $f(3)=3$인 경우

$f(1)$과 $f(2)$가 될 수 있는 수는 6

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

1 또는 2 또는 3 또는 4

따라서 f의 개수는

$$1 \cdot {}_4\Pi_3 = 1 \cdot 4^3 = 64$$

이상에서 구하는 함수의 개수는

$$72+64=136$$

37) **정답** 9

$\left(x+\dfrac{1}{x^n}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

$${}_{10}\mathrm{C}_r\, x^{10-r}\left(\frac{1}{x^n}\right)^r = {}_{10}\mathrm{C}_r\, x^{10-(n+1)r}$$

상수항은 $10-(n+1)r=0$일 때이므로 $(n+1)r=10$

이를 만족시키는 r, n의 순서쌍 $(r,\ n)$은

$(1,\ 9)$, $(2,\ 4)$, $(5,\ 1)$

따라서 n의 최댓값은 9이다.

38) **정답** ⑤

$$(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠은 첫째항이 $1+x$, 공비가 $1+x$, 항의 개수가 10인 등비수열의 합이므로

$$\frac{(1+x)\{(1+x)^{10}-1\}}{(1+x)-1} = \frac{(1+x)^{11}-(1+x)}{x} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 전개식에서 x의 계수는 ㉡의 $(1+x)^{11}$의 전개식에서 x^2의 계수와 같다.

$(1+x)^{11}$의 전개식의 일반항은 ${}_{11}\mathrm{C}_r x^r$

$x^r=x^2$에서 $r=2$

따라서 구하는 계수는 ${}_{11}\mathrm{C}_2=55$

39) **정답** ③

빨간 공이 x번, 노란 공이 y번 나온다고 하면

$$x+y=5,\ x+2y=7$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=2$

따라서 7점을 얻으려면 빨간 공이 3번, 노란 공이 2번 나와야 하므로

구하는 확률은 ${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{3}{7}\right)^3\left(\dfrac{4}{7}\right)^2$

40) **정답** $\dfrac{11}{64}$

(ⅰ) 소수가 적힌 공을 꺼내고, 동전을 3번 던져서 3번 모두 앞면이 나올 확률은

$$\frac{3}{8} \cdot {}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{3}{64}$$

(ⅱ) 짝수가 적힌 공을 꺼내고, 동전을 4번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$$\frac{4}{8} \cdot {}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{8}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\dfrac{3}{64}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{11}{64}$